Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Juli2006

12. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Die Methode von Lagrange)

Wir untersuchen die Funktion $f(x,y) = y^2$ auf der Menge

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1\}.$$

Gesucht sind die lokalen Extremstellen von f auf P. Vergleiche die beiden Lösungswege:

1. Ersetze y und berechne die Extremstellen von $x \mapsto f(x, x^2 - 1)$.
2. Verwende die Methode von Lagrange zur Berechnung der kritischen Stellen von f auf der Menge P.

Lösung: Einsetzen: $f(x, x^2-1) = (x^2-1)^2 = F(x)$. Extremstellen von F: $F'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 1$. Wegen $F''(x) = 4(3x^2 - 1)$ gilt $F\prime\prime(x_{2,3}) > 0$ und $F\prime\prime(x_1) < 0$, also ist x_1 ein Maximum und $x_{2,3}$ ein Minumum. Der maximale Wert von f auf P ist also $f(x_1, x_1^2 - 1) = f(0,-1) = 1$ und der Minimale Wert $f(\pm 1, 0) = 0$.

Alternativ: Lagrange: $\nabla_{x,y,\lambda}(f - \lambda(y - x^2 + 1)) = (2\lambda x, 2y - \lambda, y - x^2 + 1) = (0,0,0)$. Falls $\lambda \neq 0$ bekommen wir $x_1 = 0$ und $y_1 = -1$, für $\lambda = 0$ aber $x_{2,3} = \pm 1$ und $y = 0$. In diesen Punkten nimmt f die Werte $f(0,-1) = 1$ und $f(\pm 1, 0) = 0$ an.

A 2 (Die Methode von Lagrange)

Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung g für $f(x,y) = xy^2$ und $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Lösung: Auf der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ gilt $xy^2 = x(1 - x^2) = x - x^3 = F(x)$. Extrema von f unter g sind genau die Extrema von F. Nach Rechnung ergibt sich: F hat Extremalstellen in $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Dabei ist $x_1 = \frac{1}{3}$ ein Maximum und $x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ein Minimum von F. Also ist der Maximalwert von f unter g gegeben durch $F(x_1) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ und der Minimalwert $F(x_2) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$. Alternativ: Lagrange. $\nabla_{x,y,\lambda}(f - \lambda g) = (y^2 - 2\lambda x, 2xy - 2\lambda y, g) = (0,0,0)$. Da unter der Nebenbedingung $g = 0$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte von f vorkommen, gilt für Extremalstellen $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Also folgt aus der Lagrange-Bedingung: $y^2 = 2\lambda x$ und $x = \lambda$, also $y^2 = 2x^2$. Ausserdem muss gelten $x^2 + y^2 = 1$. Daraus folgt: $x^2 = \frac{1}{3}$ und $y^2 = \frac{2}{3}$. Daher $f(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ und $f(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$. Weil f auf der kompakten Menge $x^2 + y^2 = 1$ stetig ist, nimmt es dort sein Maximum und Minimum an, also müssen dies die Extremwerte von f unter g sein.

A 3 (Die Methode von Lagrange)

Bestimmen Sie den grössten und den kleinsten Wert , den die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x,y) = y^2 - x$$

auf dem Kreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ annimmt.

Lösung: Die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ ist genau dann erfüllt, wenn die Funktion $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ verschwindet. Eine notwendige Bedingung für das Bestehen eines Extremalpunktes ist (Methode v. Lagrange)

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$
$$g(x,y) = 0$$

Auswerten ergibt:

$$
\begin{aligned}
-1 &= \lambda \cdot 2x \\
2y &= \lambda 2y \\
x^2 + y^2 &= 1
\end{aligned}
$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen:

$$
\begin{aligned}
&(x, y) = (-1, 0) \quad \lambda = 1/2 \\
&(x, y) = (1, 0) \quad \lambda = -1/2 \\
&(x, y) = (-1/2, \sqrt{3}/2) \quad \lambda = 1 \\
&(x, y) = (-1/2, -\sqrt{3}/2) \quad \lambda = 1
\end{aligned}
$$

Lokale Extremstellen von f unter der Nebenbedingung können sich nur an diesen vier Stellen befinden. (Aber nicht jeder Punkt muss ein solches lokales Extremum sein). Als stetige Funktion nimmt f auf dem Kreisring einen grössten und kleinsten Wert an. Wir vergleichen daher die Funktionswerte der vier Punkte.

$$
f(-1, 0) = 1, \quad f(1, 0) = -1, \quad f(-1/2, \sqrt{3}/2) = 5/4, \quad f(-1/2, -\sqrt{3}/2) = 5/4
$$

Also ist -1 der kleinste und $5/4$ der grösste Wert von f auf dem Kreis.

A 4 (Die Mehrfachintegration)

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$
\int_D f(x, y) d(x, y)
$$

für die Funktion $f(x, y) = y$ und das Gebiet D zwischen dem oberen Einheitskreis (d.h. $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$) und der Funktion $y = 1 - x^2$. Hinweis: Überlegen Sie sich, wie das Gebiet aussieht und welche Integrationsreihenfolge zweckmäßig ist.

Lösung: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 1 - x^2 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$. Also

$$
\begin{aligned}
\int_D f(x, y) d(x, y) &= \int_{-1}^{1} \int_{1-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2} \Big|_{1-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [(1 - x^2) - (1 - x^2)^2] \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 - x^4 \, dx = \frac{2}{15} .
\end{aligned}
$$