11. Übung zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (^{P} **Wo liegen Maxima?**) (3 Punkte)
Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf D stetig differenzierbar, so dass $df(x)$ für alle $x \in D$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass $\|f\|$ sein Maximum nicht in D annehmen kann, also dass

$$\sup_{x\in\overline{D}} \|f(x)\| = \sup_{x\in\partial D} \|f(x)\|$$

gilt.

Angenommen das Maximum von $\|f\|$ wird einem Punkt $x \in D$ angenommen. Weil $df(x)$ invertierbar ist, läßt sich f in einer Umgebung $U \subset D$ von x umkehren. Das heißt, dass es eine Umgebung V von $f(x)$ gibt, so dass

$$f : U \to V$$

invertierbar ist. Aus der Definition von Umgebungen folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x)+\delta f(x) \in V$. Sei $y := f^{-1}(f(x) + \delta f(x))$. Dann gilt

$$\|f(y)\| = \|f(x) + \delta f(x)\| = (1 + \delta)\|f(x)\|.$$

Das widerspricht der Annahme, dass $\|f(x)\|$ maximal ist.

A 2 (^{P} **Eine Verallgemeinerung des Banachschen Fixpunktsatzes**) (4 Punkte)
Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so dass für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ein q mit $0 < q < 1$ existiert, so dass

$$\|T^m x - T^m y\| \leq q\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt. Zeige

1. Es gibt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ von T, das heißt $T(\bar{x}) = \bar{x}$.
2. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $T^k(x) \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x}$.

Hinweis: Der herkömmliche Banachsche Fixpunktsatz (Beh. für $m = 1$) kann verwendet werden.
Gilt für jede Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dass aus $g^m(\bar{x}) = \bar{x}$ folgt $g(\bar{x}) = \bar{x}$?

Der gewöhnliche Banachsche Fixpunktsatz angewendet auf T^m liefert die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ von T^m mit $T^{jm}x \xrightarrow{j\to\infty} \bar{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere folgt:

$$T^{jm+k}x = T^{jm}(T^k x) \xrightarrow{j\to\infty} \bar{x}$$

für alle $k \in \{0, ..., m - 1\}$. Also zerfällt $(T^k x)_k$ in m Teilfolgen, die alle gegen $\bar{x}$ konvergieren. Also gilt

$$T^n x \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{x}$ ein Fixpunkt von T ist. Dies folgt aus

$$\|\bar{x} - T\bar{x}\| = \|T^m\bar{x} - T^m T\bar{x}\| \leq q\|\bar{x} - T\bar{x}\|.$$

Dieser Fixpunkt ist eindeutig, da jeder Fixpunkt von T auch ein Fixpunkt von T^m ist; dieser ist eindeutig.

Natürlich ist die Antwort auf die Frage nein. Denn sei $g(x) = -x$. Dann hat g nur 0 als Fixpunkt und für g^2 sind alle Punkte des $\mathbb{R}^n$ Fixpunkte.

A 3 (**Satz über implizite Funktionen**) (5 Punkte)
Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 9z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

1. Zeige, dass sich dieses System in einer Umgebung des Punktes $\left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ eindeutig nach y und z auflösen lässt. D.h.
$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = g(x).$$
2. Berechne $g'(0)$.

1. Sei
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+4y^2+9z^2-1 \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$
Wir müssen zeigen, dass sich die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ in der Nähe von $\left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ eindeutig nach y und z auflösen lässt. Wir verwenden den Satz über implitzite Funktionen. Zuerst stellen wir fest, dass $f\left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right) = 0$. Man sieht leicht, dass f auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar ist und dass
$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 18z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Wir prüfen nach, ob die Matrix
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8y & 18z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
invertierbar an der Stelle $\left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ ist. An diesem Punkt ist die Determinante der Matrix
$$\begin{vmatrix} 8\frac{1}{\sqrt{13}} & -18\frac{1}{\sqrt{13}} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{26}{\sqrt{13}} \neq 0,$$
also ist die Matrix invertierbar.
Somit gibt es offene Umgebungen $U = (-\delta, \delta)$ von 0 in $\mathbb{R}$ und V von $\left(\frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ in $\mathbb{R}^2$, und eine Funktion $g : U \to V, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, so dass $g(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}} \\ -\frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$, $f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Außerdem ist $g(x)$ die eindeutige Lösung der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ mit $x \in (-\delta, \delta), (y,z) \in V$.

2. Sei $x \in (-\delta, \delta)$. Differenziert man die Gleichungen $f_i(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$, $i = 1, 2$, so erhält man
$$\begin{aligned} 2x + 8g_1(x)g_1'(x) + 18g_2(x)g_2'(x) &= 0 \\ 1 + g_1'(x) + g_2'(x) &= 0. \end{aligned}$$
Setzt man $g_1'(x) = -1 - g_2'(x)$ in die erste Gleichung ein, dann folgt $2x - 8g_1(x) - 8g_1(x)g_2'(x) + 18g_2(x)g_2'(x) = 0$. Somit hat man
$$g_2'(x) = \frac{4g_1(x) - x}{9g_2(x) - 4g_1(x)}, \quad g_1'(x) = \frac{-9g_2(x) + x}{9g_2(x) - 4g_1(x)}.$$

Insbesondere, $g_1'(0) = -\frac{9}{13}$, $g_2'(0) = -\frac{4}{13}$. *Also*

$$g'(0) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} \\ -\frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

A 4 (Satz über implizite Funktionen) (5 Punkte)

Ist die Gleichung

$$x^y - y^x = 0$$

in der Nähe von (e, e) bzw. $(2, 4)$ nach einer Variablen auflösbar?

Anleitung für den Fall (e, e)**:** Studiere die Funktion

$$g : (x, y) \mapsto y \log x - x \log y$$

auf Kreisen

$$K_r := \{(x, y) \mid (x, y) = (e, e) + r(\cos t, \sin t)\}$$

für $r > 0$ und achte auf das Vorzeichen.

Wir setzen $f(x, y) := x^y - y^x$. *Dann gilt* $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \ln x \cdot x^y - xy^{x-1}$. *Somit hat man* $\frac{\partial}{\partial y} f(2, 4) = 8(2 \ln 2 - 1) \neq 0$. *Ausserdem gilt* $2^4 - 4^2 = 0$. *Somit lässt sich* f *in* $(2, 4)$ *lokal nach* y *auflösen.*

Analog zeigt man, dass man auch lokal nach x *auflösen kann.*

Sei nun

$$h(r, t) := (e, e) + r(\cos t, \sin t)$$

Dann gilt

$$g(h(r, \frac{\pi}{2})) = g(e, e + r) = (e + r) - e \log(e + r) \quad \text{und} \quad g(h(r, \pi)) = g(e - r, e) = -(e - r) + e \log(e - r).$$

Es gilt $\partial_x(x - e \log x) = 1 - \frac{e}{x}$. *Hieran sieht man leicht, dass*

$$x - e \log x \geq e - e \log e = 0$$

somit folgt $g(h(r, \frac{\pi}{2})) > 0$ *und* $g(h(r, \pi)) < 0$. *Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein* $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ *mit* $g(h(r, t)) = 0$. *Für* $(x, y) = h(r, t)$ *gilt* $y \log x = x \log y$, *also* $x^y = y^x$.

Also findet man in jeder Umgebung von (e, e) *Punkte* (x, y) *mit* $x \neq y$ *und* $x^y = y^x$. *Außerdem gilt sowieso* $x^x = x^x$. *Also kann es keine Auflösung nach* y *(und auch keine nach* x*) geben.*

A 5 (**^{K} Invertierbare Matrizen)** (5 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Raum der $n \times n$-Matrizen.

(1) Zeige ohne Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\| \leq 1$ ($\|\cdot\|$ die Operatornorm) die Abbildung $(\mathrm{id} - A)$ invertierbar ist mit

$$(\mathrm{id} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

(2) Beweise, dass die Menge $GL(n)$ der invertierbaren Matrizen eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(3) Beweise mit Hilfe der Neumann-Reihe, dass die Abbildung

$$\mathrm{inv} : GL(n) \to GL(n), \quad A \mapsto A^{-1}$$

stetig ist.

(1) Da $\|\cdot\|$ die Operatornorm ist, gilt $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Also gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|} < \infty.$$

Somit haben wir eine konvergente Majorante gefunden, das heißt $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ ist absolut konvergent, also konvergent. Man rechnet leicht nach

$$(\mathrm{id} - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = A^0 = \mathrm{id}.$$

Das beweist die Behauptung.
(2) Sei A invertierbar. Wir zeigen, dass jedes B mit $\|A - B\| \leq \frac{1}{1+\|A^{-1}\|}$ auch invertierbar ist. Man hat

$$\|\mathrm{id} - A^{-1}B\| = \|A^{-1}A - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\|\|A - B\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 + \|A^{-1}\|} < 1$$

Also ist $\mathrm{id} - (\mathrm{id} - A^{-1}B) = A^{-1}B$, und somit erst recht B invertierbar.

Zum Beweis der Stetigkeit nehmen wir wieder an, dass $\|B - A\| < \frac{1}{1+\|A^{-1}\|}$ gilt. Dann hat man

$$\|B^{-1}\| = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{id} - A^{-1}B)^k \right) A^{-1} \right\| \leq \|A^{-1}\| \sum \left(\frac{\|A^{-1}\|}{1 + \|A^{-1}\|} \right)^k =: c.$$

somit schätzt man ab:

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| = \|A^{-1}(B - A)B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|B - A\|c \xrightarrow{B \to A} 0.$$