Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Juli 2006

11. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (^{P} **Wo liegen Maxima?**) (3 Punkte)
Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf D stetig differenzierbar, so dass $df(x)$ für alle $x \in D$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass $\|f\|$ sein Maximum nicht in D annehmen kann, also dass

$$\sup_{x \in \overline{D}} \|f(x)\| = \sup_{x \in \partial D} \|f(x)\|$$

gilt.

A 2 (^{P} **Eine Verallgemeinerung des Banachschen Fixpunktsatzes**) (4 Punkte)
Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so dass für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ein q mit $0 < q < 1$ existiert, so dass

$$\|T^m x - T^m y\| \leq q\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt. Zeige

1. Es gibt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ von T, das heißt $T(\bar{x}) = \bar{x}$.
2. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $T^k(x) \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x}$.

Hinweis: Der herkömmliche Banachsche Fixpunktsatz (Beh. für $m = 1$) kann verwendet werden.
Gilt für jede Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dass aus $g^m(\bar{x}) = \bar{x}$ folgt $g(\bar{x}) = \bar{x}$?

A 3 (**Satz über implizite Funktionen**) (5 Punkte)
Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 9z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

1. Zeige, dass sich dieses System in einer Umgebung des Punktes $\left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ eindeutig nach x und y auflösen lässt. D.h.
$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = g(x).$$
2. Berechne $g'(0)$.

A 4 (**Satz über implizite Funktionen**) (5 Punkte)
Ist die Gleichung

$$x^y - y^x = 0$$

in der Nähe von (e, e) bzw. $(2, 4)$ nach einer Variablen auflösbar?
Anleitung für den Fall (e, e)**:** Studiere die Funktion

$$g : (x, y) \mapsto y \log x - x \log y$$

auf Kreisen

$$K_r := \{(x, y) \mid (x, y) = (e, e) + r(\cos t, \sin t)\}$$

für $r > 0$ und achte auf das Vorzeichen.

A 5 **(^{K} Invertierbare Matrizen)** (5 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Raum der $n \times n$-Matrizen.

(1) Zeige ohne Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\| \leq 1$ ($\|\cdot\|$ die Operatornorm) die Abbildung $(\mathrm{id} - A)$ invertierbar ist mit

$$(\mathrm{id} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

(2) Beweise, dass die Menge $GL(n)$ der invertierbaren Matrizen eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(3) Beweise mit Hilfe der Neumann-Reihe, dass die Abbildung

$$\mathrm{inv} : GL(n) \to GL(n), \quad A \mapsto A^{-1}$$

stetig ist.