Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26. Juni 2006

10. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Kurz-Test)

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Dann gilt

( ) Jedes geschlossene Vektorfeld besitzt ein Potential.

( ) Jedes Vektorfeld besitzt ein Potential.

(x) Jedes Gradientenvektorfeld f ist geschlossen.

(x) Jedes geschlossene Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet besitzt ein Potential.

A 2 (Schraubenlinie)

Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma : [2\pi, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t), \frac{1}{t})$$

und bestimmen Sie den Rand ihres Bildes in $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Der Rand des Bildes von γ ist

$$\gamma([2\pi, \infty)) \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

A 3 (Kurvenlänge)

1. Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma : (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$
2. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma (-y, x, z^2) \cdot dX$ über $\Gamma = \gamma(0, 2\pi)$.

Lösung. Für die Länge der Kurve gilt

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Das Kurvenintegral berechnen wir mit

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (-y, x, z^2) \cdot dX &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, t^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t + t^2)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\, dt \\ &= |_0^{2\pi}\, t + t^3/3 = 2\pi + (2\pi)^3/3 \end{aligned}$$

A 4 (Potential 3P)

Betrachte das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(xy) + xy\exp(xy) \\ x^2 \exp(xy) - 2y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld eine Potentialfunktion besitzt.

b) Berechnen Sie diese Potentialfunktion F. (Hinweis: Wir wissen dass $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$. Bestimme eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass

$$F(x,y) = h(x,y) + g(y)$$

mit einem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Danach bestimme die Funktion g.)

c) Differenzieren Sie F um zu überprüfen, dass es sich wirklich um ein Potential handelt.

d) Berechne für den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, 1-t^2)$ das Wegintegral

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx.$$

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= x\exp(xy) + x\exp(xy) + x^2 y \exp(xy) \\ &= 2x\exp(xy) + x^2 y\exp(xy) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Weil $\mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet ist gibt es daher eine Potentialfunktion.

b) Für festes y gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \exp(xy) + xy\exp(xy) = \frac{\partial}{\partial x}(x\exp(xy)).$$

Also

$$F(x,y) = x\exp(xy) + g(y)$$

mit einem $g(y) \in \mathbb{R}$. Da $g(y) = F(x,y) - x\exp(xy)$, ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Desweiteren

$$x^2\exp(xy) - 2y = f_2(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(xy) = x^2\exp(xy) + g'(y).$$

Das impliziert $g'(y) = -2y$ und also $g(y) = -y^2 + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Wir setzen $C = 0$ und erhalten

$$F(x,y) = x\exp(xy) - y^2$$

als eine Potentialfunktion.

c) $\mathrm{grad} F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

d) Da f ein Gradientenfeld ist, hängt das Integral nur von Anfangs-und Endpunkt ab:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 1 + 1 = 2.$$

A 5 (Parametrisieren auf Bogenlänge: 3P vorführen)

Bestimmen Sie die Bogenlänge der Zykloide

$$\gamma : (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

als Funktion des Parameters t, parametrisieren Sie die Kurve $\Gamma = \gamma(0, 2\pi)$ als Funktion $\alpha(s)$ der Bogenlänge s. Zeigen Sie, dass $\|\alpha'(s)\| = 1$ gilt

Hinweis: $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ und $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

Lösung. Für $t \in (0, 2\pi)$ gilt für die Bogenlänge

$$\begin{aligned}
s(t) :&= \int_0 1^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{(1-\cos\tau)^2 + (\sin\tau)^2} \\
&= \int_0 1^t \sqrt{2 - 2\cos\tau}\, d\tau = 2\int_0 1^t \|\sin\frac{\tau}{2}\|\, d\tau \\
&= |_0^t - 4\cos\frac{\tau}{2} = 4 - 4\cos\frac{t}{2} \in [0, 8]
\end{aligned}$$

Nach t auflösen ergibt

$$\cos\frac{t}{2} = 1 - \frac{s(t)}{4}, \quad t(s) = 2\arccos(1 - \frac{s}{4})$$

Wir finden eine neue Parametrisierung der Kurve, indem wir setzen

$$\begin{aligned}
&\alpha : (0, 8) \mapsto \mathbb{R}^2, \quad \alpha(s) := \gamma(t(s)) \\
\alpha_1(s) &= 2\arccos(1 - \frac{s}{4}) - \sin[2\arccos(1 - \frac{s}{4})] \\
\alpha_2(s) &= 1 - \cos[2\arccos(1 - \frac{s}{4})] \\
&= 1 - (2\cos^2[\arccos(1 - \frac{s}{4})] - 1) \\
&= 2 - 2(1 - \frac{s}{4})^2 \\
\alpha_1'(s) &= \sqrt{1 - (1 - \frac{s}{4})^2}, \quad \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \\
\alpha_2'(s) &= 1 - \frac{s}{4}
\end{aligned}$$

Daher $\|\alpha'(s)\| = 1$.

A 6 (Wegintegrale)

Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene. Der Weg W verbinde die drei Punkte entlang der Kanten des Dreiecks mit den Ecken A, B, C. Parametrisiere die Kanten $K(A, B), K(B, C), K(C, A)$ und den Weg W und berechne die Kurvenintegrale

$$\int_{K(A,B)} (x, y)\, dX, \int_{K(B,C)} (x, y)\, dX, \int_{K(A,B)(x,y)} dX, \int_W (x, y)\, dX$$

Lösung. Wir parametrisieren das Dreieck, dazu

$$\begin{aligned}
K(A, B) :&A + t(B - A), \quad t \in (0, 1) \\
K(B, C) :&B + t(C - B) \quad t \in (0, 1) \\
K(C, A) :&C + t(A - C) \quad t \in (0, 1)
\end{aligned}$$

mit $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Es ist dann

$$\int_{K(A,B)} (x, y)\, dX = \int_0^1 (A + t(B - A)) \cdot (B - A)\, dt = A \cdot (B - A) + \frac{1}{2}\|B - A\|^2$$

entsprechend für die anderen Kanten. Aufsummieren ergibt 0 (nachprüfen!) Das hätten wir auch einfacher haben können: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt das Potential $\Psi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Daher ist das Wegintegral über den geschlossenen Weg W null.

A 7 (Wegintegrale 3P)

Fliesst ein konstanter Strom I durch einen unendlich langen Leiter, dann wird das Magnetfeld

$$F(x, y, z) = \frac{I}{2\pi}(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0)$$

aufgebaut, falls die z-Achse in Stromrichtung liegt. Sei der Weg W eine Kreislinie in einer Ebene parallel zur $x-y$-Ebene mit Radius $r > 0$ und dem Mittelpunkt auf der z-Achse, durchlaufen gegen den Uhrzeigersinn. Parametrisieren Sie den Weg und berechnen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$.

Lösung. Die entsprechende Parameterdarstellung des Weges ist

$$X(t) = (r\,\cos t, r\,\sin t, z_0)$$

Also ergibt sich das Wegintegral zu

$$\begin{aligned}\int_W F \cdot dX &= \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-r\sin t}{r^2}(-r\,\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2}(r\cos t)\,dt \\ &= \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt = I\end{aligned}$$

A 8 (Potential 3P)

Hat $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-y) \\ 2(y-x) \end{pmatrix}$$

ein Potential? Wenn ja, dann bestimmen Sie dieses Potential.

Lösung: Zuerst überprüfen wir die Integrabilitätsbedingungen. Also $F_{2,x} = -1$ und $F_{1,y} = -1$. Weil F auf dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist, hat F also ein Potential Φ. Um das Potential konkret zu bestimmen, gehen wir folgenden Weg. Zunächst muss also gelten

$$\begin{aligned}\Phi_x(x,y) &= 2(x-y) \Rightarrow \Phi(x,y) = x^2 - 2x\,y + C_1(y) \\ \Phi_y(x,y) &= 2(y-x) \Rightarrow \Phi(x,y) = y^2 - 2x\,y + C_2(x)\end{aligned}$$

Wir setzen $C_1(y) = y^2,\ C_2(x) = x^2$. Damit ergibt sich

$$\Phi(x,y) = x^2 - 2x\,y + y^2 = (x-y)^2$$

.