Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26. Juni 2006

# 10. Übung zur Analysis II

## Aufgaben

**A 1 (Kurz-Test)**

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Dann gilt

( ) Jedes geschlossene Vektorfeld besitzt ein Potential.

( ) Jedes Vektorfeld besitzt ein Potential.

( ) Jedes Gradientenvektorfeld $f$ ist geschlossen.

( ) Jedes geschlossene Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet besitzt ein Potential.

**A 2 (Schraubenlinie)**

Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma : [2\pi, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t), \frac{1}{t})$$

und bestimmen Sie den Rand ihres Bildes in $\mathbb{R}^3$.

**A 3 (Kurvenlänge)**

1. Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma : (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$
2. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma (-y, x, z^2) \cdot dX$ über $\Gamma = \gamma(0, 2\pi)$.

**A 4 (Potential 3P)**

Betrachte das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(xy) + xy\exp(xy) \\ x^2 \exp(xy) - 2y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld eine Potentialfunktion besitzt.

b) Berechnen Sie diese Potentialfunktion $F$. (Hinweis: Wir wissen dass $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$. Bestimme eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass

$$F(x,y) = h(x,y) + g(y)$$

mit einem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Danach bestimme die Funktion $g$.)

c) Differenzieren Sie $F$ um zu überprüfen, dass es sich wirklich um ein Potential handelt.

d) Berechne für den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, 1 - t^2)$ das Wegintegral

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx.$$

**A 5 (Parametrisieren auf Bogenlänge: 3P vorführen)**

Bestimmen Sie die Bogenlänge der Zykloide

$$\gamma : (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

als Funktion des Parameters $t$, parametrisieren Sie die Kurve $\Gamma = \gamma(0, 2\pi)$ als Funktion $\alpha(s)$ der Bogenlänge $s$. Zeigen Sie, dass $\|\alpha'(s)\| = 1$ gilt
Hinweis: $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ und $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

**A 6 (Wegintegrale)**

Es seien $A, B, C$ drei Punkte in der Ebene. Der Weg $W$ verbinde die drei Punkte entlang der Kanten des Dreiecks mit den Ecken $A, B, C$. Parametrisiere die Kanten $K(A,B), K(B,C), K(C,A)$ und den Weg $W$ und berechne die Kurvenintegrale

$$\int_{K(A,B)} (x,y)\, dX, \int_{K(B,C)} (x,y)\, dX, \int_{K(A,B)(x,y)} dX, \int_{W} (x,y)\, dX$$

**A 7 (Wegintegrale 3P)**

Fliesst ein konstanter Strom $I$ durch einen unendlich langen Leiter, dann wird das Magnetfeld

$$F(x,y,z) = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

aufgebaut, falls die $z$-Achse in Stromrichtung liegt. Sei der Weg $W$ eine Kreislinie in einer Ebene parallel zur $x-y$-Ebene mit Radius $r > 0$ und dem Mittelpunkt auf der $z$-Achse, durchlaufen gegen den Uhrzeigersinn. Parametrisieren Sie den Weg und berechnen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$.

**A 8 (Potential 3P)**

Hat $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-y) \\ 2(y-x) \end{pmatrix}$$

ein Potential? Wenn ja, dann bestimmen Sie dieses Potential.