## 9. Übung zur Analysis II, Lösungsvorschlag

## Aufgaben

**A 1** ($^{KP}$ **Satz von Taylor**) (5 Punkte)
Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $k$-mal stetig differenzierbare Funktion und $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) := \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

ein Polynom vom Grad $\leq k$.
Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-p(h)}{\|h\|^k} = 0$,

(2) $p$ ist das $k$-te Taylorpolynom von $f$ (mit Entwicklungspunkt 0).

*Es gilt nach dem Satz von Taylor*

$$f(h) = \sum_{|\alpha|\leq k-1} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f(\tau h))h^\alpha =: T_{k-1}(h) + R(h).$$

*„(1) $\Rightarrow$ (2)" Sei $q(h) := p(h) - T_k(h)$. Es ist $q = 0$ zu zeigen.*
*Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach (1) ein $\delta > 0$, so dass $|\frac{f(h)-p(h)}{\|h\|^k}| < \varepsilon$, falls $\|h\| < \delta$. Da $D^\alpha f$ für $|\alpha| = k$ stetig ist, kann man $\delta$ so wählen, dass $|D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)| < \varepsilon$ für $\|h\| < \delta$, da $\tau \leq 1$. Man hat für $\|h\| < \delta$*

$$\begin{aligned}
|q(h)| &= |p(h) - f(h) + T_{k-1}(h) + R(h) - T_k(h)| \\
&\leq |p(h) - f(h)| + \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} ((D^\alpha f(\tau h))h^\alpha - (D^\alpha f(0))h^\alpha) \right| \\
&\leq \varepsilon\|h\|^k + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\varepsilon\|h\|^{|\alpha|} \\
&= c\varepsilon\|h\|^k.
\end{aligned}$$

*Also gilt $\frac{q(h)}{\|h\|^k} \to 0$. Wir schreiben $q(h) = \sum_{|\beta|\leq k} b_\beta h^\beta$. Dann gilt für festes $h$ und $t \in \mathbb{R}$*

$$q(th) = \sum_{|\beta|\leq k} b_\beta t^{|\beta|} h^\beta = \sum_{j=0}^{k} c(j,h)t^j$$

*und*

$$\frac{1}{|t|^i} q(th) \xrightarrow{t\to 0} 0 \;\; \text{für} \;\; i = 1, ..., k.$$

*Angenommen, wir hätten schon gezeigt $c(j,h) = 0$ für $j = 0, ..., l$, $l < k$. Dann gilt*

$$0 \xleftarrow{t\to 0} \frac{1}{t^{l+1}} q(th) = \sum_{j=l+1}^{k} c(j,h)t^{j-l} \xrightarrow{t\to 0} c(l+1,h).$$

*Also ist $c(l+1,h) = 0$. Per Induktion folgt also (Der Induktionsanfang geht analog zum Induktionsschritt) $q(th) = 0$ für alle $t$ und weil $h$ beliebig war, gilt $q = 0$ und wir haben (2) bewiesen.*
*„(2) $\Rightarrow$ (1)" Sei $p(h) = T_k(h)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|h\|^k}|f(h) - p(h)| &= \frac{1}{\|h\|^k} \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0))h^\alpha \right| \\
&\leq \frac{1}{\|h\|^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}|D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)|\|h\|^{|\alpha|} \\
&\leq \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}|D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)| \\
&\xrightarrow{h\to 0} 0,
\end{aligned}$$

*weil $D^\alpha f$ für $|\alpha| = k$ stetig ist.*

**A 2 (Weglänge in Polarkoordinaten)** (6 Punkte)
Wir betrachten einen Weg der Gestalt

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(\phi) = r(\phi) \cdot (\cos\phi, \sin\phi),$$

wobei $r : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar ist.

1. Begründe, dass $\gamma$ rektifizierbar ist und zeige
$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi.$$

2.$^P$ Im Falle
$$r : [-\pi, \pi] \to [0, \infty), \quad r(\phi) := 1 + \cos\phi$$
nennt man die zugehörige Kurve Kardioide.
Zeige, dass die Kardioide eine Jordankurve ist.

3. Begründe, dass die Kardioide eine Kurvenlänge besitzt und berechne diese.

1. *Der Weg $\gamma$ ist stetig differenzierbar und nach Satz 11.5 daher rektifizierbar. Die Produktregel der Differentialrechnung liefert*
$$\gamma'(\phi) = r'(\phi) \cdot (\cos\phi, \sin\phi) + r(\phi) \cdot (-\sin\phi, \cos\phi).$$
*Weil $(\cos\phi, \sin\phi)$ und $(-\sin\phi, \cos\phi)$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren sind, erhalten wir*
$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{(r'(\phi))^2 + (r(\phi))^2}.$$
*Setzt man dies in die Formel aus Satz 11.5 ein, so folgt die Behauptung.*
2. *Die Abbildung*
$$(\rho, \phi) \mapsto \rho(\cos\phi, \sin\phi) : \ (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
*ist injektiv. Da $r(\phi) > 0$ für $\phi \in (-\pi, \pi)$ ist, ist somit $\gamma$ auf $(-\pi, \pi)$ injektiv.*
*Also gilt für $s < t$ mit $\gamma(s) = \gamma(t)$ notwendig $s = -\pi$ oder $t = \pi$. Nun ist aber $\gamma(-\pi) = \gamma(\pi) = 0$, während $\gamma(\phi) \neq (0, 0)$ für $\phi \in (-\pi, \pi)$. Somit ist nur noch $s = -\pi$ und $t = \pi$ möglich. Wir haben gezeigt, dass $\gamma$ eine Jordankurve ist, das heißt die Kardioide ist ein Jordanweg.*
3. *Nach 1. und 2. ist $\Gamma := Bild\,\gamma$ ein rektifizierbarer Jordanweg. Nach Satz 11.5 und 11.6 ist $\Gamma$ die Weglänge $L(\gamma)$ zugeordnet. Da $r'(\phi) = -\sin\phi$ ist, ist*
$$r(\phi)^2 + r'(\phi)^2 = 1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi = 2(1 + \cos\phi) = 4\cos\frac{\phi}{2}.$$
*Somit erhält man*
$$L(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} 2|\cos\frac{\phi}{2}| d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos\frac{\phi}{2} d\phi = 8.$$

**A 3 (Wegintegrale skalarwertiger Funktionen)** (3 Punkte)
In einer Junggesellenwohnung, deren Fußboden wir uns als die Halbebene

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

vorstellen, hat sich vor der Wand $x = 0$ eine Staubschicht angehäuft, deren Höhe $h(x, y) = 2e^{-x}$ beträgt (in Millimetern, an der Stelle $(x, y) \in H$, wobei $x, y$ in Metern). Der junge Mann bewegt den Staubsauger während einer Sekunde geradlinig auf einer Strecke $\Gamma$ vom Punkt $(2, 0)$ nach $(1, 1)$. Zur Zeit $t \in [0, 1]$ befinde sich die Düse des Saugers an der Stelle

$$\gamma(t) := (2 - t^2, t^2).$$

Das momentan pro zurückgelegter Wegstrecke beim Passieren des Punktes $(x, y) \in \Gamma$ aufgenommene Volumen Staub betrage $f(x, y) = 0{,}2 \cdot h(x, y)$ (in Liter pro Meter). Berechne das Gesamtvolumen Staub (in Liter), das längs der Strecke $\Gamma$ eingesaugt wird.

*Das gesuchte Volumen ist*

$$V = \int_\gamma g = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = 0,6\int_0^1 e^{-(2-t^2)}\sqrt{2}\cdot 2t\,dt = 0,6\sqrt{2}e^{-2}[e^{t^2}]_0^1 = 0,6\sqrt{2}e^{-2}(e-1)$$

*(was c.a. 0,2 Liter sind.)*

**A 4** **(Ein Wegintegral)** (2 Punkte)
Sei $f(x,y) := (-y,x)$ und $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.
Berechne das Wegintegral von $f$ längs $\gamma$.

*Es gilt* $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$. *Also hat man*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \cdot d(x,y) &= \int_0^{2\pi} -(\sin t)\cdot(-sint)\,dt + \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

**A 5** ($^P$ **Wegzusammenhangskomponenten)** (5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren eine Relation „$\sim$" auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt einen Weg } \gamma : [0,1] \to \Omega \text{ mit } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y.$$

Ein solcher Weg heißt „*Weg von $x$ nach $y$*". Zeige, dass „$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist.
Was bedeutet das für die Menge $\Omega$?

- *Reflexivität: Für jedes $x \in \Omega$ ist der konstante Weg $\alpha(t) := x$ ein Weg von $x$ nach $x$. Also $x \sim x$*
- *Symmetrie: Sei $x \sim y$. Dann gibt es $\beta : [0,1] \to \Omega$ mit $\beta(0) = x$ und $\beta(1) = y$. Dann ist $\beta_-(t) := \beta(1-t)$ ein Weg von $y$ nach $x$. Also $y \sim x$.*
- *Transitivität: Sei $x \sim y$ und $y \sim z$. Weiter sei $\gamma_1$ ein Weg von $x$ nach $y$ und $\gamma_2$ ein Weg von $y$ nach $z$. Sei*

  $$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } t \in (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

  *Dann ist $\gamma$ ein stetiger Weg von $x$ nach $z$, also $x \sim z$.*

*Für das Gebiet bedeutet das, dass es in Äquivalenzklassen zerfällt, das heißt man kann es in Teilmengen (die sogenannten Wegzusammenhangskomponenten) zerlegen, in denen je zwei Punkte durch einen Weg verbindbar sind. Jedoch lassen sich zwei Punkte aus unterschiedlichen Komponenten nicht durch einen Weg verbinden.*