Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19. Juni 2006

9. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (^{KP} **Satz von Taylor**) (5 Punkte)
Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion und $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

ein Polynom vom Grad $\leq k$.
Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-p(h)}{\|h\|^k} = 0$,

(2) p ist das k-te Taylorpolynom von f (mit Entwicklungspunkt 0).

A 2 **(Weglänge in Polarkoordinaten)** (6 Punkte)
Wir betrachten einen Weg der Gestalt

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(\phi) = r(\phi) \cdot (\cos\phi, \sin\phi),$$

wobei $r : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar ist.

1. Begründe, dass γ rektifizierbar ist und zeige

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi.$$

2.^{P} Im Falle

$$r : [-\pi, \pi] \to [0, \infty), \quad r(\phi) := 1 + \cos\phi$$

nennt man die zugehörige Kurve Kardioide.
Zeige, dass die Kardioide eine Jordankurve ist.

3. Begründe, dass die Kardioide eine Kurvenlänge besitzt und berechne diese.

A 3 **(Wegintegrale skalarwertiger Funktionen)** (3 Punkte)
In einer Junggesellenwohnung, deren Fußboden wir uns als die Halbebene

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

vorstellen, hat sich vor der Wand $x = 0$ eine Staubschicht angehäuft, deren Höhe $h(x, y) = 2e^{-x}$ beträgt (in Millimetern, an der Stelle $(x, y) \in H$, wobei x, y in Metern). Der junge Mann bewegt den Staubsauger während einer Sekunde geradlinig auf einer Strecke Γ vom Punkt $(2, 0)$ nach $(1, 1)$. Zur Zeit $t \in [0, 1]$ befinde sich die Düse des Saugers an der Stelle

$$\gamma(t) := (2 - t^2, t^2).$$

Das momentan pro zurückgelegter Wegstrecke beim Passieren des Punktes $(x, y) \in \Gamma$ aufgenommene Volumen Staub betrage $f(x, y) = 0,2 \cdot h(x, y)$ (in Liter pro Meter). Berechne das Gesamtvolumen Staub (in Liter), das längs der Strecke Γ eingesaugt wird.

A 4 **(Ein Wegintegral)** (2 Punkte)
Sei $f(x,y) := (-y,x)$ und $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.
Berechne das Wegintegral von f längs γ.

A 5 **(^{P} Wegzusammenhangskomponenten)** (5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren eine Relation „$\sim$" auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt einen Weg } \ \gamma : [0,1] \to \Omega \ \text{ mit } \ \gamma(0) = x \ \text{ und } \ \gamma(1) = y.$$

Ein solcher Weg heißt „*Weg von x nach y*". Zeige, dass „$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist.
Was bedeutet das für die Menge Ω?

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 19.06.2006 – 16:15-17:15 Uhr – S207/109

Dr. rer. nat. habil. Patrizio Neff
FG Analysis
„Exkursionen in die nichtlineare Elastizität und Plastizität – Herausforderungen an die angewandte Mathematik"

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen (Kaffee, Tee und Kekse) in S215/219, bei dem Interessierte über den Vortrag diskutieren und die Vortragenden näher kennenlernen können.