Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. Juni 2006

8. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Kurz-Test)

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

1. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. In $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gelte $\nabla f(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ sei positiv definit, das heisst: $\forall\, y \neq 0 \in \mathbb{R}^n : \langle y, H_f(x_0).y \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$. Dann ist x_0 ein
   - ( ) globales Maximum von f.
   - ( ) lokales Maximum von f.
   - (+) lokales Minimum von f.
   - ( ) Sattelpunkt von f.
   - ( ) globales Minimum von f.
2. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei ein globales Minimum von f, dann ist die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ in x_0
   - ( ) positiv definit und symmetrisch
   - (+) positiv semi-definit, d.h $\forall\, y \neq 0 \in \mathbb{R}^n : \langle y, H_f(x_0).y \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0$.
   - (+) symmetrisch.
   - ( ) indefinit, d.h garnichts.

A 2 (Kettenregel)

Berechnen Sie die Ableitung von $h(x) = g(f(x))$ für $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, $\quad f(t) = (t, \sin t, \cos t)$ und $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $\quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3 \cdot x_2^2$ über die Kettenregel. Desgleichen für die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\quad f(x, y) = (xy^2 + \cos y, x, y)$ und $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\quad g(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2)$

Lösung:Wir verwenden die Kettenregel. Im ersten Fall gilt z.B.:

$$\begin{aligned} Dg(x_1, x_2, x_3) &= (2x_1, 2x_2x_3, x_2^2) \\ Df(t) &= (1, \cos t, -\sin t)^T \\ Dg(f(t)) \cdot Df(t) &= 2t\,1 - 2\cos^2 t \sin t - \sin^3(t) \end{aligned}$$

Der zweite Fall ist Ihre Rechnung.

A 3 (Extremwerte 3P)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = e^{xy + x - y}$$

innerhalb des abgeschlossenen Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(4, 0)$ und $(0, -4)$.

1. Skizzieren Sie den Definitionsbereich und tragen Sie nachfolgende Ergebnisse ein.
2. Untersuchen Sie die Funktion auf etwaige lokale Extremalstellen oder Sattelpunkte im Innern von D und bestimmen Sie deren Typ.
3. Diskutieren Sie das Verhalten von f auf dem Rand von D und ermitteln Sie die globalen Extremalstellen von f auf ganz D.

Lösung: Den Gradienten nullsetzen:

$$\nabla f(x,y) = e^{xy+x-y} \begin{pmatrix} y+1 \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y) = (1,-1) \in D\,.$$

Klassifizieren mittels zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (y+1)^2\, e^{xy+x-y}, \\ f_{xy}(x,y) &= (xy+x-y)\, e^{xy+x-y}, \\ f_{yy}(x,y) &= (x-1)^2\, e^{xy+x-y}\,. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix

$$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle H_f(1,-1).(1,1)^T, (1,1)^T \rangle > 0, \quad \langle H_f(1,-1).(1,-1)^T, (1,-1)^T \rangle < 0\,.$$

Also ist die Hesse-Matrix nicht definit, der Punkt $(1,-1)$ ist ein Sattelpunkt. Untersuchung auf dem Rand:

$$\begin{aligned} f(x,0) &= e^x, \quad \text{monoton wachsend für } x \in [0,4]. \\ f(0,y) &= e^{-y}, \quad \text{monoton wachsend für } y \in [0,-4]. \\ f(x,x-4) &= e^{(x-2)^2}, \quad \text{zu untersuchen für } x \in [0,4]. \\ \frac{d}{dx} f(x,x-4) &= 2(x-2)\, e^{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow (x,y) = (2,-2) \in \partial D\,. \end{aligned}$$

Wertevergleich zeigt: absolute Minima bei $(0,0)$ und $(2,2)$, absolute Maxima bei $(4,0)$ und $(0,-4)$.

A 4 (Mittelwertsatz 3P)

Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ gegeben und es gebe eine Konstante $L > 0$ so dass

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n : \quad |f(x) - f(y)| \le L\, |x-y|^2_{\mathbb{R}^n}$$

Zeigen Sie: f ist stetig. f ist differenzierbar. f ist konstant.

Lösung: Die Stetigkeit sehen wir so: Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{L}}$ die Abschätzung

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \le \delta \;\Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon.$$

Die Differenzierbarkeit der Funktion sehen wir so: es gilt doch

$$|f(x+h) - f(x) + 0 \cdot h| \le L|h|^2$$

Also ist die 0-Funktion eine lineare Abbildung, welche f überall mit quadratischem Fehler approximiert. So eine Funktion mit dieser Eigenschaft ist schon eindeutig, daher ist 0 die Ableitung von f. Aus dem Mittelwertsatz folgt dann, dass f konstant sein muss.

A 5 (Maxima und Minima 3P vorführen)

Sei $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema. Welche sind Maxima, welche Minima? (Hinweis: Betrachten sie im kritischen Punkt $(0,0)$ die Funktion auf der x-Achse und der ersten Winkelhalbierenden.

Lösung: Den Gradienten nullsetzen:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 + 4x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kandidaten für Extremstellen sind

$$(x_1, y_1) = (0,0), \quad (x_2, y_2) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad (x_3, y_3) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})\,.$$

Klassifizieren mit der Hesse-Matrix:

$$
\begin{aligned}
H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix} \\
H_f(x_1,y_1) &= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{pos./neg. Eigenwerte: indefinit} \\
H_f(x_2,y_2) &= \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{positiv definit: rel. Minimum} \\
H_f(x_3,y_3) &= \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{positiv definit: rel. Minimum}
\end{aligned}
$$

Auswertung auf der x-Achse und der 1. Winkelhalbierenden zeigt: $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt.

A 6 (Extremwerte 3P)

Sei $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R}$, mit

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y\,.$$

1. Überprüfen Sie alle relativen Extrema von f. Geben Sie an, ob es sich um relative Maxima oder Minima handelt.
2. Besitzt die Funktion ein absolutes Maximum oder Minimum auf dem Quadranten mit $x > 0$, $y < 0$ und $x < 0$, $y > 0$?

Lösung: Den Gradienten nullsetzen:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} - 4 \\ -\frac{1}{y^2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}, \quad y = \pm 1\,.$$

Kandidaten für Extremstellen sind also

$$(x_1,y_1) = (\frac{1}{2},1), \quad (x_2,y_2) = (-\frac{1}{2},1), \quad (x_3,y_3) = (-\frac{1}{2},-1), \quad (x_4,y_4) = (\frac{1}{2},-1)\,.$$

Klassifizieren mit der Hesse-Matrix:

$$
\begin{aligned}
H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} f_x x & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix} \\
H_f(x_1,y_1) &= \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{pos./neg. Eigenwerte: Sattelpunkt} \\
H_f(x_2,y_2) &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{nur pos. Eigenwerte: rel. Minimum} \\
H_f(x_3,y_3) &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{pos./neg. Eigenwerte: Sattelpunkt} \\
H_f(x_4,y_4) &= \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{nur neg. Eigenwerte: rel. Maximum}
\end{aligned}
$$

Für $x > 0$, $y < 0$ gilt $f(x, -\frac{1}{n}) \to -\infty$, $n \to \infty$ und $f(\frac{1}{n}, y) \to -\infty$, $n \to \infty$. Also gibt es kein absolutes Minimum dort. Dasselbe gilt für $x < 0$, $y > 0$: dort gibt es kein absolutes Maximum. Hingegen ist $(x_4,y_4) = (\frac{1}{2},-1)$ mit $f(x_4,y_4) = -6$ ein abolutes Maximum für $x > 0$, $y < 0$. Genauso ist $(x_2,y_2) = (-\frac{1}{2},1)$ mit $f(x_2,y_2) = 6$ ein abolutes Mimimum auf $x < 0$, $y > 0$.

A 7 (Lineare Gleichungssysteme 3P)

Sei $A \in M^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) := \langle x, A.x\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle b, x\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

für gebebenes $b \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f. Gibt es immer kritische Punkte für beliebige A, b?

Zeigen Sie: Wenn A positiv definit ist, dann gibt es genau einen kritischen Punkt und f hat im kritischen Punkt ein globales Minimum. Was folgt daraus für lineare Gleichungssysteme mit positiv definiter Koeffizientenmatrix?

Lösung: Wir entwickeln $f(x+h)$ und lesen daran die Ableitung von f sowie die zweite Ableitung von f ab. Es gilt (nachrechnen)

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle - \langle b, h\rangle + \langle Ah, h\rangle \\ &= f(x) + 2\langle Ax, h\rangle - \langle b, h\rangle + \langle Ah, h\rangle \quad \text{wegen } A = A^T \\ &= f(x) + \langle 2Ax - b, h\rangle - \langle b, h\rangle + \langle Ah, h\rangle \end{aligned}$$

Also gilt $Df(x) = 2Ax - b$. Kritische Punkte sind Lösungen von $0 = Df(x) = 2Ax - b$. Die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $2Ax - b = 0$ ist identisch mit der Existenz kritischer Punkte. Es muss nicht immer kritische Punkte geben.

Falls A positiv definit ist, so ist A invertierbar und das LGS hat eine eindeutige Lösung-es gibt genau einen kritischen Punkt. Dieser Punkt ist ein lokales Minimum, denn die Hesse-Matrix ist positiv definit. Hier ist ja

$$\frac{1}{2}\langle h, H_f(x).h\rangle = \langle Ah, h\rangle > 0 \quad h \neq 0\,.$$

Es gibt also nur ein lokales Minimum. Weil f stetig differenzierbar ist (klar-Polynom), könnte es ein sonstiges globales Minimum nur ausserhalb jedes beschränkten Gebietes geben. f wächst aber quadratisch für große Argumente x, so dass dort mit Sicherheit kein Minimum zu finden ist. Das lokale Minimum ist auch das globale. Abkürzung: die Funktion f ist strikt konvex für A positiv definit. Strik konvexe Funktionen haben ein eindeutiges globales Minimum.