Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13. Juni 2006

8. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Kurz-Test)

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

1. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. In $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gelte $\nabla f(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ sei positiv definit, das heisst: $\forall\, y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$: $\langle y, H_f(x_0).y\rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$. Dann ist x_0 ein
   ( ) globales Maximum von f.
   ( ) lokales Maximum von f.
   ( ) lokales Minimum von f.
   ( ) Sattelpunkt von f.
   ( ) globales Minimum von f.
2. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei ein globales Minimum von f, dann ist die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ in x_0
   ( ) positiv definit und symmetrisch
   ( ) positiv semi-definit, d.h $\forall\, y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$: $\langle y, H_f(x_0).y\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0$.
   ( ) symmetrisch.
   ( ) indefinit, d.h garnichts.

A 2 (Kettenregel)

Berechnen Sie die Ableitung von $h(x) = g(f(x))$ für $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, $\quad f(t) = (t, \sin t, \cos t)$ und $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $\quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3 \cdot x_2^2$ über die Kettenregel. Desgleichen für die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\quad f(x, y) = (xy^2 + \cos y, x, y)$ und $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\quad g(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2)$

A 3 (Extremwerte 3P)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = e^{xy+x-y}$$

innerhalb des abgeschlossenen Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(4, 0)$ und $(0, -4)$.

1. Skizzieren Sie den Definitionsbereich und tragen Sie nachfolgende Ergebnisse ein.
2. Untersuchen Sie die Funktion auf etwaige lokale Extremalstellen oder Sattelpunkte im Innern von D und bestimmen Sie deren Typ.
3. Diskutieren Sie das Verhalten von f auf dem Rand von D und ermitteln Sie die globalen Extremalstellen von f auf ganz D.

A 4 (Mittelwertsatz 3P)

Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ gegeben und es gebe eine Konstante $L > 0$ so dass

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n : \quad |f(x) - f(y)| \leq L\, |x - y|^2_{\mathbb{R}^n}$$

Zeigen Sie: f ist stetig. f ist differenzierbar. f ist konstant.

A 5 (Maxima und Minima 3P vorführen)

Sei $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema. Welche sind Maxima, welche Minima? (Hinweis: Betrachten sie im kritischen Punkt $(0, 0)$ die Funktion auf der x-Achse und der ersten Winkelhalbierenden.

A 6 **(Extremwerte 3P)**

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$, mit

$$f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y\,.$$

1. Überprüfen Sie alle relativen Extrema von f. Geben Sie an, ob es sich um relative Maxima oder Minima handelt.
2. Besitzt die Funktion ein absolutes Maximum oder Minimum auf dem Quadranten mit $x > 0$, $y < 0$ und $x < 0$, $y > 0$?

A 7 **(Lineare Gleichungsysteme 3P)**

Sei $A \in M^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) := \langle x, A.x \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle b, x \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

für gebebenes $b \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f. Gibt es immer kritische Punkte für beliebige A, b?
Zeigen Sie: Wenn A positiv definit ist, dann gibt es genau einen kritischen Punkt und f hat im kritischen Punkt ein globales Minimum. Was folgt daraus für lineare Gleichungssysteme mit positiv definiter Koeffizientenmatrix?