Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Juni 2006

7. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Multiindex 3P)

1. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\beta$ und $\beta = (1, 3, 2)$. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 4. Ordnung.
2. Es seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$. Beweisen Sie die Anmerkung im Skript:

$$(D^\alpha f)(x) = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} x^{\beta-\alpha} & \text{falls } \beta \geq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierbei sind $\beta - \alpha, \beta \geq \alpha$ und $\beta!$ analog zum Skript komponentenweise zu verstehen.

Lösung: Die Rechnungen im ersten Fall sollten klar sein. Für den zweiten Fall betrachten wir zuerst Monome, d.h. Terme der Form ${x_1}^{\beta_1}$. Dann gilt für $\beta_1 \geq \alpha_1$

$$D^{\alpha_1} {x_1}^{\beta_1} = \beta_1(\beta_1 - 1) \ldots (\beta_1 - \alpha_1 + 1) x^{\beta_1 - \alpha_1} = \frac{\beta_1!}{(\beta_1 - \alpha_1)!} x^{\beta_1 - \alpha_1}$$

Daraus setzt sich das Produkt zusammen, da die x_i beim differenzieren unabhängig voneinander sind.

A 2 (Jacobimatrix 5P)-vorführen

1. Wie sieht die Anwendung der Jacobimatrix $J_F(x).h$ für die Funktion $F = \det : \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}$ im Punkt $x \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \neq 0$, aus?
2. Für $n = 2, 3$ bestimmen Sie die Taylorentwicklung von F bis zum Grad $2, 3$ jeweils im Punkt 0.
3. Ist die zugehörige Hesse-Matrix positiv definit? $(n = 2, 3)$

Lösung: Die Determinante einer $n \times n$-Matrix ist eine multilineare (n-lineare) Abbildung. D.h. für $x = (x_1|\ldots|x_n), h = (h_1|\ldots|h_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jeweils spaltenweise geordnet, gilt

$$F(x+h) = \det[x+h] = \det[x_1 + h_1|\ldots|x_n + h_n] = \det[x_1|\ldots|x_n]$$
$$\sum_{j=1}^{n} \det[x_1|\ldots|h_j|\ldots|x_n] + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \det[x_1|\ldots|h_k|\ldots|h_j|\ldots|x_n] + \ldots$$

Also lässt sich der lineare Term in h identifizieren zu

$$J_F(x).h = \sum_{j=1}^{n} \det[x_1|\ldots|h_j|\ldots|x_n]\,.$$

Für $n = 3$ sehen wir direkt was passiert:

$$\det[0 + h] = \det[h_1|h_2|h_3]$$

ist also ein Polynom dritten Grades in h. Die Taylorentwicklung in 0 besteht nur aus dem Term dritter Ordnung, also ist die Hesse-Matrix in 0 die Null-Matrix. Genauso für $n = 2$

$$\det[0 + h] = \det[h_1|h_2],$$

die Taylorentwicklung endet (natürlich) nach dem zweiten Grad. Die Hesse-Matrix läßt sich ablesen zu

$$\langle h, H_F(0).h\rangle_{\mathbb{R}^4} = 2\ \det[h_1|h_2] = \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}$$

so dass die zugehörige Hesse-Matrix zwar nicht verschwindet, aber nicht positiv definit in der 0 sein kann, weil $\det h$ kein Vorzeichen hat falls $h \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beliebig ist.

A 3 (Taylorentwicklung)

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y, z) = e^{2y}\ \cos(x + y)$$

in ein Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x, y)$ mit Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Berechnen Sie daraus eine Näherung für $f(0.1, 0.1)$. Zur Kontrolle: Es gilt exakt: $f(0.1, 0.1) = 1.19705\ldots$.

Lösung: Die nötigen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= e^{2y}\ \cos(x + y), \qquad f(0, 0) = 1\\
f_x(x, y) &= -e^{2y} \sin(x + y), \qquad f_x(0, 0) = 0\\
f_y(x, y) &= e^{2y}(2 \cos(x + y) - \sin(x + y)), \qquad f_y(0, 0) = 2\\
f_{xx}(x, y) &= -e^{2y}\ \cos(x + y), \qquad f_{xx}(0, 0) = -1\\
f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -e^{2y}[2 \sin(x + y) + \cos(x + y)], \qquad f_{xy}(0, 0) = -1\\
f_{yy}(x, y) &= e^{2y}[3 \cos(x + y) - 4 \sin(x + y)], \qquad f_{yy}(0, 0) = 3\,.
\end{aligned}$$

Damit lautet die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= f(0, 0) + x\, f_x(0, 0) + y\, f_y(0, 0) + \frac{x^2}{2} f_{xx}(0, 0) + xy\, f_{xy}(0, 0) + \frac{y^2}{2} f_{yy}(0, 0)\\
&= 1 + 2y - \frac{x^2}{2} - xy + \frac{3}{2}y^2
\end{aligned}$$

Näherung an der Stelle $(0.1, 0.1)$:

$$T_2(0.1, 0.1) = \ldots = 1.2, \quad \|f(0.1, 0.1) - T_2(0.1, 0.1)\| \le 0.029\ldots$$

A 4 (Richtungsableitung 3P)

1. Ihr Studiennachbar behauptet, er könnte Ihnen die Richtungsableitung erklären. Dazu verwendet er eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ und die Einheitsrichtungen $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), h_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), h_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$ und erklärt: es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^2$ so daß die Richungsableitungen in h_i-Richtung jeweils den Wert $1, 2, 3$ annehmen. Hat Ihr Studiennachbar ausgeschlafen?
2. Vielleicht hat sich Ihr Studiennachbar aber nur in der Anzahl der h_i-Richtungen vertan. Beschränken Sie sich auf h_1, h_2. Kann die Aussage ihres Studiennachbarn dann stimmen? Wenn ja, geben Sie den Gradienten von f im Punkt x_0 an.

Lösung: Es müsste gelten

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(x_0), h_1\rangle_{\mathbb{R}^2} &= 1\\
\langle \nabla f(x_0), h_2\rangle_{\mathbb{R}^2} &= 2\\
\langle \nabla f(x_0), h_3\rangle_{\mathbb{R}^2} &= 3\,.
\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise also

$$\begin{pmatrix} h_1 - -- \\ h_2 - -- \\ h_3 - -- \end{pmatrix}.\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das sind drei lineare Gleichungen für die zwei Komponenten in $\nabla f(x_0)$. Das erweiterte lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 1 \\ h_{21} & h_{22} & 2 \\ h_{31} & h_{32} & 3 \end{pmatrix}$$

hat vollen Rang, also ist das Gleichungssystem überbestimmt. Ihr Studiennachbar hat noch nicht ausgeschlafen!

Alles ändert sich wenn wir nur zwei Richtungen betrachten. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x_0), h_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} &= 1 \\ \langle \nabla f(x_0), h_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} &= 2, \end{aligned}$$

welche zwei Gleichungen sich eindeutig nach den zwei Komponenten von $\nabla f(x_0)$ auflösen lassen. Invertierung des entstehenden Gleichungssystems bleibt dem aufgewachten Studiennachbarn überlassen.

A 5 (Höhenlinien 3P)

1. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $\phi(x) = \langle a, x \rangle$ mit $a = (1,2) \in \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die Höhenlinien von ϕ und berechnen sie den Gradienten. In welche Richtung ändert sich ϕ am stärksten?
2. Beweisen Sie noch einmal: Der Gradient einer differenzierbaren Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ steht senkrecht auf den Höhenlinien.

Lösung: $\phi(x+h) - \phi(x)$ soll maximal werden für h. Also $\phi(x+h) - \phi(x) = \langle a, h \rangle$. Das Skalarprodukt wird maximal für h parallel zu a. Die Funktion ϕ stellt eine gekippte Ebene über dem $\mathbb{R}^2$ dar, die Höhenlinien sind Geraden mit Normalenvektor a. Der Gradient von ϕ kann aus der obigen Rechnung abgelesen werden: $\nabla\phi(x) = a$. Also zeigt der Gradient in die Richtung des steilsten Anstiegs und steht senkrecht auf den Höhenlinien.

Um nochmal zu sehen, dass das auch im allgemeinen Fall gilt, betrachten wir eine lokale Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ der Höhenlinien so dass also gilt $\phi(\gamma(s)) = \mathit{konstant}$. Nach Ableitung nach dem Kurvenparameter s ergibt sich aus der Kettenregel

$$\langle \nabla\phi(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle = 0$$

Da $\dot{\gamma}(s)$ tangential an die Höhenlinien liegt, steht also $\nabla\phi(\gamma(s))$ senkrecht dazu.

A 6 (Taylorentwicklung 3P)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, mit

$$f(x,y) = x^3 \ln(xy)$$

1. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2(x,y)$ um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.
2. Schätzen Sie den Fehler von $T_2(x,y)$ an der Stelle $(1, 0.9)$ nach oben ab.

Lösung: Die nötigen Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 \ln(xy), \qquad f(1,1) = 0 \\ f_x(x,y) &= x^2\,(2\ln(xy) + 1), \qquad f_x(1,1) = 1 \\ f_y(x,y) &= \frac{x^3}{y}, \qquad f_y(1,1) = 1 \\ f_{xx}(x,y) &= x[6\ln(xy) + 5], \qquad f_{xx}(1,1) = 5 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = \frac{3x^2}{y}, \qquad f_{xy}(1,1) = 3 \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{x^3}{y^2}, \qquad f_{yy}(1,1) = -1\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(1,1) + (x-1)\,f_x(1,1) + (y-1)\,f_y(1,1) + \frac{(x-1)^2}{2} f_{xx}(1,1) \\ &\quad + (x-1)(y-1)\,f_{xy}(1,1) + \frac{(y-1)^2}{2} f_{yy}(1,1) \\ &= 3 - 7x - y + \frac{5}{2}x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

Restgliedabschätzung:

$$\begin{aligned} R_3(1,0.9) &= \frac{1}{3!} \cdot (-0.1)^3 f_{yyy}(1,\zeta), \quad \zeta \in (0.9,1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (-0.1)^3 \frac{2x^3}{y^3}(1,\zeta) \\ \|R_3(1,0.9)\| &\leq \frac{10^{-3}}{6} \max_{\zeta \in (0.9,1)} \frac{2 \cdot 1^3}{\zeta^3} \\ &\leq \frac{10^{-3}}{3} \frac{1}{0.9^3 = \frac{1}{3}\frac{1}{9^3}} \end{aligned}$$