Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Juni 2006

7. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Multiindex 3P)

1. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\beta$ und $\beta = (1,3,2)$. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 4. Ordnung.
2. Es seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$. Beweisen Sie die Anmerkung im Skript:
$$(D^\alpha f)(x) = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} x^{\beta-\alpha} & \text{falls } \beta \geq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Hierbei sind $\beta - \alpha, \beta \geq \alpha$ und $\beta!$ analog zum Skript komponentenweise zu verstehen.

A 2 (Jacobimatrix 5P)-vorführen

1. Wie sieht die Anwendung der Jacobimatrix $J_F(x).h$ für die Funktion $F = \det : \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}$ im Punkt $x \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \neq 0$, aus?
2. Für $n = 2, 3$ bestimmen Sie die Taylorentwicklung von F bis zum Grad $2, 3$ jeweils im Punkt 0.
3. Ist die zugehörige Hesse-Matrix positiv definit? ($n = 2, 3$)

A 3 (Taylorentwicklung)

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x,y,z) = e^{2y} \cos(x+y)$$
in ein Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x,y)$ mit Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$. Berechnen Sie daraus eine Näherung für $f(0.1, 0.1)$. Zur Kontrolle: Es gilt exakt: $f(0.1, 0.1) = 1.19705\ldots$.

A 4 (Richtungsableitung 3P)

1. Ihr Studiennachbar behauptet, er könnte Ihnen die Richtungsableitung erklären. Dazu verwendet er eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ und die Einheitsrichtungen $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), h_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), h_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$ und erklärt: es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^2$ so daß die Richungsableitungen in h_i-Richtung jeweils den Wert $1, 2, 3$ annehmen. Hat Ihr Studiennachbar ausgeschlafen?
2. Vielleicht hat sich Ihr Studiennachbar aber nur in der Anzahl der h_i-Richtungen vertan. Beschränken Sie sich auf h_1, h_2. Kann die Aussage ihres Studiennachbarn dann stimmen? Wenn ja, geben Sie den Gradienten von f im Punkt x_0 an.

A 5 (Höhenlinien 3P)

1. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $\phi(x) = \langle a, x\rangle$ mit $a = (1,2) \in \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die Höhenlinien von ϕ und berechnen sie den Gradienten. In welche Richtung ändert sich ϕ am stärksten?
2. Beweisen Sie noch einmal: Der Gradient einer differenzierbaren Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ steht senkrecht auf den Höhenlinien.

A 6 (Taylorentwicklung 3P)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, mit

$$f(x,y) = x^3 \ln(xy)$$

1. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2(x,y)$ um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.
2. Schätzen Sie den Fehler von $T_2(x,y)$ an der Stelle $(1, 0.9)$ nach oben ab.