6. Übung zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (^{P} **Partiell differenzierbar aber nicht stetig)**
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \cdot y = 0 \\ 0 & \text{für } x \cdot y \neq 0 \end{cases}.$$

Zeige:

- f ist im Nullpunkt partiell differenzierbar.
- f ist im Nullpunkt nicht stetig.

Es gilt $f(x,0) = 1$ *also* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *und* $f(0,y) = 1$, *also* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. *Es gilt aber auch* $f(0,0) = 1$ *und* $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1 = f(0,0)$.

A 2 **(Kettenregel und der Satz von Schwarz)** (5 Punkte)

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Beweise $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathrm{u} = 0$ für alle zwei mal stetig differenzierbaren $u : U \to \mathbb{R}^3$.

(ii) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Wir definieren eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x,y,z) := f(x-y, y-z, z-x)$. Zeige, dass gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

(i) Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathrm{u} &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_3}{\partial \mathrm{x}_2} - \frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial \mathrm{x}_3}, \frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial \mathrm{x}_3} - \frac{\partial \mathrm{u}_3}{\partial \mathrm{x}_1}, \frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial \mathrm{x}_1} - \frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial \mathrm{x}_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii) Wir schreiben $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$. *Dann gilt*

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z) = 0
\end{aligned}$$

A 3 (^{P} **Abbildungen von Matrizen)** (6 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der $n \times n$-Matrizen.

(i) Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die durch $|||\cdot|||$ induzierte Operatornorm. Zeige

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{für alle} \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(ii) Sei

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (A,B) \mapsto A^2B.$$

Zeige, dass f in jedem Punkt (A,B) differenzierbar ist und berechne $df(A,B)$.

(i) es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|||ABx||| \leq \|A\||||Bx||| \leq \|A\|\|B\||||x|||.$$

Somit gilt $\|AB\| = \inf\{|||ABx|||\ ,\ x \in \mathbb{R}^n,\ |||x||| = 1\} \leq \inf\{\|A\|\|B\|\ ,\ x \in \mathbb{R}^n,\ |||x||| = 1\} = \|A\|\|B\|$.
(ii) Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$. Diese ist equivalent zu der (von irgendeiner Norm) induzierten Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(A+H,B+K) &= (A+H)^2(B+K) \\ &= A^2B + AHB + HAB + H^2B + A^2K + AHK + HAK + H^2K \\ &= f(A,B) + (AHB + HAB + A^2K) + H^2B + AHK + HAK + H^2K. \end{aligned}$$

Die Abbildung $(H,K) \mapsto AHB + HAB + A^2K$ ist offenbar linear. Außerdem

$$\begin{aligned} \frac{\|H^2B + AHK + HAK + H^2K\|}{\|H\| + \|K\|} &\leq c\frac{\|H^2B + AHK + HAK + H^2K\|_{Op}}{\|H\|_{Op} + \|K\|_{Op}} \\ &\leq c\frac{\|H\|_{Op}^2 B + 2\|A\|_{Op}\|H\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}^2\|K\|_{Op}}{\|H\|_{Op} + \|K\||Op} \\ &\leq c\frac{\|H\|_{Op}^2\|B\|_{Op} + 2\|A\|_{Op}\|H\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}^2\|K\|_{Op}}{\|H\|_{Op}} \\ &\leq c(\|H\|_{Op}\|B\|_{Op} + 2\|A\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}\|K\|_{Op}) \\ &\xrightarrow{(H,K)\to 0} 0. \end{aligned}$$

A 4 **(Differenzierbarkeit)** (6 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeige

- $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\frac{\partial}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren, sind aber im Nullpunkt nicht stetig.
- f ist im Nullpunkt differenzierbar.

Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) + (x^2+y^2)\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})(-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}) \\ &= 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}). \end{aligned}$$

Sei $y = 0$. Dann hat man

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{h^2 \sin\frac{1}{|h|}}{h} = h\sin\frac{1}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Somit ist existiert die partielle Ableitung nach x.
Sei $a_n = (\frac{1}{2n\pi}, 0)$. Dann gilt $a_n \to (0,0)$ aber

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_n) = 0 - \cos 2n\pi = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig. Für die Ableitung nach y geht alles genauso.
Wir zeigen nun, dass die Fréchetableitung 0 ist. Es gilt für $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$

$$\frac{f(h)}{\|h\|} = \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \left| (h_1^2 + h_2^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right) \right| \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Also gilt

$$f(0+h) = 0 + 0h + f(h) = f(0,0) + df(0,0)h + f(h)$$

und f ist in $(0,0)$ differenzierbar.

A 5 (^{K} **Differenzieren von Integralen)** (6 Punkte)
Seien I und J nichtausgeartete kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$. Seien $g, h : I \to J$ differenzierbar mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in I$. Ausserdem sei

$$K, \frac{\partial K}{\partial x} : I \times J \to \mathbb{R}$$

stetig. Wir definieren $f : I \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,\xi) d\xi.$$

Zeige:

(i)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_J K(x,\xi)\, d\xi\right) = \int_J \frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi)\, d\xi.$$

(ii) $f : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit

$$f'(x) = K(x, h(x)) \cdot h'(x) - K(x, g(x)) \cdot g'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial K}{\partial x} d\xi.$$

Anleitung: Zu (i): Mittelwertsatz, gleichmäßige Stetigkeit, gleichmäßige Konvergenz.
Zu (ii):

$$G : I \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto (g(x), h(x), x)$$
$$H : J \times J \times I, \quad (u,v,w) \mapsto \int_u^v K(w,\xi) d\xi$$

und Kettenregel.

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Da $\frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi)$ stetig und die Menge $I \times J$ kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$ so dass $|K(x,\xi) - K(y,\xi)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \delta$. Sei $|h| < \delta$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\left| \frac{K(x+h,\xi) - K(x,\xi)}{h} - \frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x} K(\eta_{x,\xi,h}, \xi) - \frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi) \right| \leq \varepsilon,$$

weil $\eta_{x,\xi,h} \in (x - |h|, x + |h|)$ wählbar ist. Also gilt $\frac{K(x+h,\xi) - K(x,\xi)}{h} \to \frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi)$ gleichmäßig für $h \to 0$.
Also hat man

$$\frac{1}{h}\left(\int_J K(x+h,\xi)\, d\xi - \int_J K(x,\xi)\, d\xi\right) = \int_J \frac{K(x+h,\xi) - K(x,\xi)}{h}\, d\xi \xrightarrow{h \to 0} \int_J \frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi)\, d\xi.$$

Hieraus folgt die Behauptung.
(ii) Es gilt

$$G'(x) = \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_H \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \left(-K(w,u), K(w,v), \int_u^v \frac{\partial}{\partial w} K(w,\xi)\, d\xi\right).$$

nach (i) und dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Man hat $f(x) = H(G(x))$. *Nach der Kettenregel gilt folglich*

$$
\begin{aligned}
f'(x) = J_h(G(x))G'(x) &= (-K(x,g(x)), K(x,h(x)), \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi)\, d\xi) \cdot \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -K(x,g(x))g'(x) + K(x,h(x))h'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x}(x,\xi)\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 29.05.2006 – 16:15-17:15 Uhr – S207/109

Prof. Dr. Burkhard Kümmerer

FG Algebra, Geometrie und Funktionalanalysis

„Im Dreiländereck Funktionalanalysis – Stochastik – Mathematische Physik“

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen (Kaffee, Tee und Kekse) in S215/219, bei dem Interessierte über den Vortrag diskutieren und die Vortragenden näher kennenlernen können.