Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

29. Mai 2006

6. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (^{P} **Partiell differenzierbar aber nicht stetig)**
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \cdot y = 0 \\ 0 & \text{für } x \cdot y \neq 0 \end{cases}.$$

Zeige:

- f ist im Nullpunkt partiell differenzierbar.
- f ist im Nullpunkt nicht stetig.

A 2 **(Kettenregel und der Satz von Schwarz)** (5 Punkte)

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Beweise $\operatorname{div}\operatorname{rot} \mathrm{u} = 0$ für alle zwei mal stetig differenzierbaren $u : U \to \mathbb{R}^3$.

(ii) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Wir definieren eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x,y,z) := f(x-y, y-z, z-x)$. Zeige, dass gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

A 3 (^{P} **Abbildungen von Matrizen)** (6 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der $n \times n$-Matrizen.

(i) Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die durch $|||\cdot|||$ induzierte Operatornorm. Zeige

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{für alle} \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(ii) Sei

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (A,B) \mapsto A^2 B.$$

Zeige, dass f in jedem Punkt (A,B) differenzierbar ist und berechne $df(A,B)$.

A 4 **(Differenzierbarkeit)** (6 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeige

- $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\frac{\partial}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren, sind aber im Nullpunkt nicht stetig.
- f ist im Nullpunkt differenzierbar.

A 5 (^{K} **Differenzieren von Integralen)** (6 Punkte)
Seien I und J nichtausgeartete kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$. Seien $g, h : I \to J$ differenzierbar mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in I$. Ausserdem sei

$$K, \frac{\partial K}{\partial x} : I \times J \to \mathbb{R}$$

stetig. Wir definieren $f : I \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,\xi) d\xi.$$

Zeige:

(i)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_J K(x,\xi)\, d\xi\right) = \int_J \frac{\partial}{\partial x} K(x,\xi)\, d\xi.$$

(ii) $f : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit

$$f'(x) = K(x, h(x)) \cdot h'(x) - K(x, g(x)) \cdot g'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial K}{\partial x} d\xi.$$

Anleitung: Zu (i): Mittelwertsatz, gleichmäßige Stetigkeit, gleichmäßige Konvergenz.
Zu (ii):

$$\begin{aligned} &G : I \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto (g(x), h(x), x) \\ &H : J \times J \times I, \quad (u,v,w) \mapsto \int_u^v K(w,\xi) d\xi \end{aligned}$$

und Kettenregel.

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 29.05.2006 – 16:15-17:15 Uhr – S207/109

Prof. Dr. Burkhard Kümmerer

FG Algebra, Geometrie und Funktionalanalysis

„Im Dreiländereck Funktionalanalysis – Stochastik – Mathematische Physik"

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen (Kaffee, Tee und Kekse) in S215/219, bei dem Interessierte über den Vortrag diskutieren und die Vortragenden näher kennenlernen können.