5. Übung zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (^{KP} **Fourier Reihen)** (5 Punkte)
Wir wollen den folgenden Satz über die gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen beweisen. Beachte, dass die Voraussetzungen deutlich stärker sind als nötig, sie erlauben jedoch einen relativ einfachen Beweis.

Satz. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und 2-mal stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

wobei a_n und b_n durch (9.12) gegeben sind, gleichmäßig gegen f.
Gehe für den Beweis wie folgt vor.

- Berechne die Fourierkoeffizienten von f'' und integriere partiell. Folgere, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert.
- Zeige, dass aus $\|f_n - g\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ folgt $\|f_n - g\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Folgere $g = f$ mit Hilfe von Satz 9.28.

- *Wir schreiben $a_n(f), b_n(f)$ bzw. $a_n(f''), b_n(f'')$ für die Fourierkoeffizienten von f bzw. f''. Es gilt*

$$|a_n(f'')| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f''(x)\cos(nx)dx\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f''(x)|dx =: c \quad \textit{und} \quad |b_n(f'')| \le c$$

wobei c unabhängig von n ist. Ausserdem hat man

$$\begin{aligned} |a_n(f'')| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f''(x)\cos(nx)dx\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left|-\int_0^{2\pi} f'(x)(-1)n\sin(nx)dx\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(x)(-1)n^2\cos(nx)dx\right| \\ &= n^2|a_n(f)|, \end{aligned}$$

wobei die Randterme verschwinden, weil die Funktionen periodisch sind. Also gilt insbesondere

$$|a_n(f)| = \frac{1}{n^2}|a_n(f'')| \le \frac{c}{n^2}.$$

Analog beweist man $|b_n| \le \frac{c}{n^2}$. Das bedeutet

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\cos nx + b_n \sin nx\|_\infty \le \left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c}{n^2}.$$

Also ist die Reihe absolut konvergent, also gleichmäßig konvergent. Sei (f_n) die Folge der Partialsummen und g der Grenzwert.

- *Wir müssen $g = f$ zeigen. Sei $\varepsilon > 0$ und $N > 0$ so gewählt, dass $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und alle x. Dann hat man*

$$\|f_n - g\|_2 = \left(\int_0^{2\pi}|f_n(x) - g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^{2\pi}\varepsilon^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}\varepsilon$$

für $n > N$. Also konvergiert die Folge auch im quadratischen Mittel gegen g. Nach Satz 9.28 konvergiert sie aber auch gegen f und es folgt $f = g$ nach der Eindeutigkeit der Grenzwerte.

A 2 **(3 Spezielle Normen)** (5 Punkte)
Nach Satz 10.1 sind alle Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum äquivalent. Wir betrachten jetzt speziell die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

(1) Sei $v = (1, -4, 0, -2)$. Berechne $\|v\|_1$, $\|v\|_2$ und $\|v\|_\infty$.

(2) Zeichne für $n = 2$ die Einheitskreise für alle drei Normen, das heißt die Mengen

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_* < 1\}, \quad \text{wobei} \quad * = 1, 2, \infty.$$

(3) Berechne Äquivalenzkonstanten für $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$.

(1) $\|v\|_1 = 7$, $\|v\|_2 = \sqrt{21}$, $\|v\|_\infty = 4$.
(3)

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k| \le \frac{1}{n} n\|x\|_\infty \le \sum_{k=1}^{n}|x_k| = \|x\|_1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\|x\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_\infty \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2,$$

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty \le \sqrt{n}\|x\|_1.$$

A 3 (Äquivalenz von Normen) (7 Punkte)

(1^P) Beweise, daß zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem Vektorraum V genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleichen offenen Mengen liefern.

(2) Beweise nun Folgerung 10.2 aus der Vorlesung.

(i) $\mathbb{R}^n$ ist bezüglich jeder Norm vollständig.

(ii) Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ liefern die gleichen offenen Mengen.

(iii) Die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$ oder $g : \mathbb{R}^n \to Y$, wobei X und Y metrische Räume sind, hängt nicht von der Wahl der Norm auf $\mathbb{R}^n$ ab.

(1) Seien die offenen Mengen, die $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ erzeugen, gleich. Sei $B_{1,\|\cdot\|}$ die Einheitskugel bezüglich $\|\cdot\|$ und $B_{1,|||\cdot|||}$ die Einheitskugel bezüglich $|||\cdot|||$. Da $B_{1,\|\cdot\|}$ offen bezüglich $\|\cdot\|$ ist, ist sie auch offen bezüglich $|||\cdot|||$. Da $0 \in B_{1,\|\cdot\|}$ gibt es ein $\rho > 0$, so dass

$$\rho B_{1,|||\cdot|||} = \{y \in V \mid |||y||| < \rho\} \subset B_{1,\|\cdot\|}.$$

Sei nun $x \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\rho \frac{x}{2|||x|||} \in \rho B_{1,|||\cdot|||} \subset B_{1,\|\cdot\|}.$$

Also

$$\left\| \rho \frac{x}{2|||x|||} \right\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \frac{2}{\rho}|||x|||.$$

Analog (indem man die Rollen von $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ vertauscht) zeigt man, dass es ein $c > 0$ gibt mit $|||x||| \leq c||x||$.

Also sind die beiden Normen äquivalent.
Seien nun die beiden Normen äquivalent und U eine offene Menge bezüglich $\|\cdot\|$. Wegen der Äquivalenz können wir $|||x||| \geq c\|x\|$ für alle $x \in V$ annehmen.

Sei $x \in U$. Dann existiert eine Kugel mit Radius ε und Mittelpunkt x, $B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(x) \subset U$. Dann gilt

$$B_{\frac{\varepsilon}{c},|||\cdot|||}(x) \subset B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(x) \subset U,$$

denn für $y \in B_{\frac{\varepsilon}{c},|||\cdot|||}(x)$ gilt $\|x-y\| \leq c|||x-y||| \leq c\frac{\varepsilon}{c}$. Also ist U auch offen bezüglich $|||\cdot|||$. Das offene Mengen bezüglich $|||\cdot|||$ auch offen bezüglich $\|\cdot\|$ sind, zeigt man analog.
(2)

(i) Wir zeigen zunächst, dass $\mathbb{R}$ vollständig bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist.
Sei (x_k) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Sei $(x_k^{(j)})$ die Folge der j-ten Komponenten von x_k. Dann gilt

$$|x_k^{(j)} - x_i^{(j)}| \leq \|x_k - x_i\|_1 \xrightarrow{i,k\to\infty} 0.$$

Weil Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ konvergieren, gilt $x_k^{(j)} \to x^{(j)}$.

$$\|x_k - x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_k^{(j)} - x^{(j)}| \to 0.$$

Also ist $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\|\cdot\|_1$ vollständig.
Sei nun $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wegen Satz 10.1 ist diese äquivalent zu $\|\cdot\|_1$. Sei (x_k) eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|$. Dann gilt

$$\|x_k - x_j\|_1 \leq c\|x_k - x_j\| \xrightarrow{k,j\to\infty} 0.$$

Somit ist (x_k) auch eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1$. Also gilt $x_k \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_1$. Es folgt

$$\|x_k - x\| \leq c_2\|x_k - x\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Somit konvergiert die Folge auch bezüglich $\|\cdot\|$.

(ii) folgt sofort aus (1)

(iii) Folgt sofort aus (ii), wenn man die Definition, dass Urbilder offener Mengen offen sind, verwendet.

A 4 (Operatornormen) (3 Punkte)
Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $\|A\|$ die durch $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_1$ induzierte Operatornorm. Sei $(a_{i,j})$ eine Matrixdarstellung für A. Finde eine Formel für $\|A\|$ ähnlich zu der auf S181 unten.

Wir zeigen

$$\|A\| = \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|.$$

Für beliebiges x gilt

$$\|Ax\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ a_{m,k}x_k \end{pmatrix} \right\|_1 \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{j,k}x_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}| \le \left(\max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}| \right) \|x\|_1.$$

Sei nun k_0 so gewählt, dass $\sum_{j=1}^m |a_{j,k_0}| = \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^m |a_{j,k}|$. Dann hat man für $x = e_{k_0}$ (der k_0-te kanonische Einheitsvektor)

$$\|Ax\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} a_{1,k_0} \\ \vdots \\ a_{m,k_0} \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k_0}| = \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|.$$

Somit folgt die Behauptung.

A 5 (^{P} **Weierstraß'scher Approximationssatz)** (3 Punkte)
Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$, für die

$$\int_a^b f(x)x^n\,dx = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gelte. Zeige, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ ist.

Nach dem Satz von Weierstraß gibt es eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_n f)$ gleichmäßig gegen f^2. Also

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)f_n(x)dx = \int f(x)^2 dx.$$

Aus der Annahme $\int_a^b f(x)x^n\,dx = 0$ folgt

$$\int_a^b f(x)f_n(x)\,dx = 0.$$

Also folgt $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$, das heißt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. (Siehe Tutorium 1, für alle die im Tutorium waren, die anderen müssen es wohl oder übel noch beweisen. Die Musterlösung findet ihr aber auch dort)