Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

22. Mai 2006

5. Übung zur Analysis II
Aufgaben

A 1 (^{KP} **Fourier Reihen)** (5 Punkte)
Wir wollen den folgenden Satz über die gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen beweisen. Beachte, dass die Voraussetzungen deutlich stärker sind als nötig, sie erlauben jedoch einen relativ einfachen Beweis.
Satz. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und 2-mal stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

wobei a_n und b_n durch (9.12) gegeben sind, gleichmäßig gegen f.
Gehe für den Beweis wie folgt vor.

- Berechne die Fourierkoeffizienten von f'' und integriere partiell. Folgere, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert.
- Zeige, dass aus $\|f_n - g\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ folgt $\|f_n - g\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Folgere $g = f$ mit Hilfe von Satz 9.28.

A 2 **(3 Spezielle Normen)** (5 Punkte)
Nach Satz 10.1 sind alle Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum äquivalent. Wir betrachten jetzt speziell die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

(1) Sei $v = (1, -4, 0, -2)$. Berechne $\|v\|_1$, $\|v\|_2$ und $\|v\|_\infty$.
(2) Zeichne für $n = 2$ die Einheitskreise für alle drei Normen, das heißt die Mengen

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_* < 1\}, \quad \text{wobei} \quad * = 1, 2, \infty.$$

(3) Berechne Äquivalenzkonstanten für $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$.

A 3 (Äquivalenz von Normen) (7 Punkte)

(1^P) Beweise, daß zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem Vektorraum V genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleichen offenen Mengen liefern.

(2) Beweise nun Folgerung 10.2 aus der Vorlesung.

(i) $\mathbb{R}^n$ ist bezüglich jeder Norm vollständig.

(ii) Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ liefern die gleichen offenen Mengen.

(iii) Die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$ oder $g : \mathbb{R}^n \to Y$, wobei X und Y metrische Räume sind, hängt nicht von der Wahl der Norm auf $\mathbb{R}^n$ ab.

A 4 (Operatornormen) (3 Punkte)
Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $\|A\|$ die durch $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_1$ induzierte Operatornorm. Sei $(a_{i,j})$ eine Matrixdarstellung für A. Finde eine Formel für $\|A\|$ ähnlich zu der auf S181 unten.

A 5 (^{P} Weierstraß'scher Approximationssatz) (3 Punkte)
Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$, für die

$$\int_a^b f(x)x^n\,dx = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gelte. Zeige, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ ist.