4. Übung Analysis II (Roch) (1)

A1: Wir verwenden die Formeln:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}(\sin kx)\cdot x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k}\sin kx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = 0,\quad k\in\mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

{In (A2) zeigt man, daß für ungerade Funktionen f stets $a_k = 0$ $\forall k\geq 0$ gilt!}

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin kx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}x(-\cos kx) + \frac{1}{k^2}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\pi\cdot(-1)^{k+1} + \frac{1}{k}\cdot\pi(-1)^{k+1} + 0\right]$$

$$b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \Rightarrow f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\cdot\sin kx$$

Da f stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe punktweise auf $\mathbb{R}$, also $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\cdot\sin kx$.

A2: Sei also f gerade, d.h. $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dann ist für alle $k \geq 0$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx}_{\text{Subst. } \xi = -x} + \int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{\pi}^{0} f(-\xi)\cos k(-\xi)\cdot(-1)\,d\xi + \int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{\int_0^{\pi} f(\xi)\cos k\xi\,d\xi}_{\text{da } f \text{ und } \cos \text{ gerade!}} + \int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \Big)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \,.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = (\text{wie bei } a_k \ldots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{\pi}^{0} f(-\xi)\sin(-k\xi)\,d\xi + \int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{\int_0^{\pi} f(\xi)\cdot\sin(k\xi)\cdot(-1)\,d\xi}_{\text{da } f \text{ gerade und } \sin \text{ ungerade!}} + \int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \Big) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cdot \cos kx$.

A3: Mit $g(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ ist g eine gerade Funktion. Mit A2 folgt also, daß dann $b_k \equiv 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Ebenfalls mit A2 gilt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |x| \cdot \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \cos kx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k} \cdot x \cdot \sin kx + \frac{1}{k^2} \cos kx \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k^2} (-1)^k - \frac{1}{k^2} \right] = \frac{2}{\pi k^2} \left((-1)^k - 1 \right) \quad , k \geq 1$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow a_{2k} = 0 \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi (2k-1)^2} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Fourierreihe: $\frac{\pi}{2} - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{4}{\pi (2k-1)^2} \cos (2k-1)x = g(x)$.

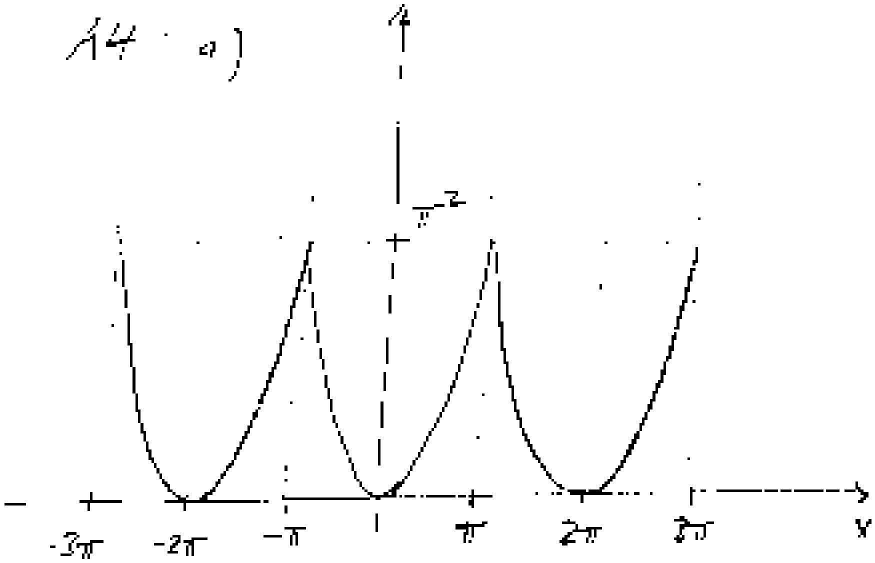
Da g stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert g punktweise.

Es gilt $g(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\cos (2k-1) \cdot 0}{(2k-1)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

$\frac{\pi^2}{8}$ ist also die Summe aller reziproken Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen.

14. a)



b.) die Funktion f ist gerade, also ist die Fourierreihe von f eine reine Cosinusreihe.

Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x^2 \frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{\sin kx}{k}\,dx$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left\{ x\,(-\cos kx)\cdot\frac{1}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx \right\}$$

$$= \frac{2}{k^2}\left(\cos k\pi - \cos(-k\pi)\right) = (-1)^k \frac{4}{k^2}$$

also $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \cdot \frac{4}{k^2}\cos kx$

A4 (Fortsetzung)

c.) Konvergenz liegt sicher vor für jedes $x \neq (2k+1)\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ da dann f in x stetig differenzierbar ist.

In $x = (2k+1)\pi$ gilt $f((2k+1)\pi + 0) = f((2k+1)\pi - 0)$ und es existieren $f_+'((2k+1)\pi)$ und $f_-'((2k+1)\pi)$.

Also gilt (punktweise!)

$$(*)\quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k \cdot \cos kx}{k^2}$$

d) f ist stetig und stückweise glatt $\Rightarrow$ gleichm. Konvergenz der Fourierreihe.

e.) 1.) Für $x = 0$ lautet $(*)$

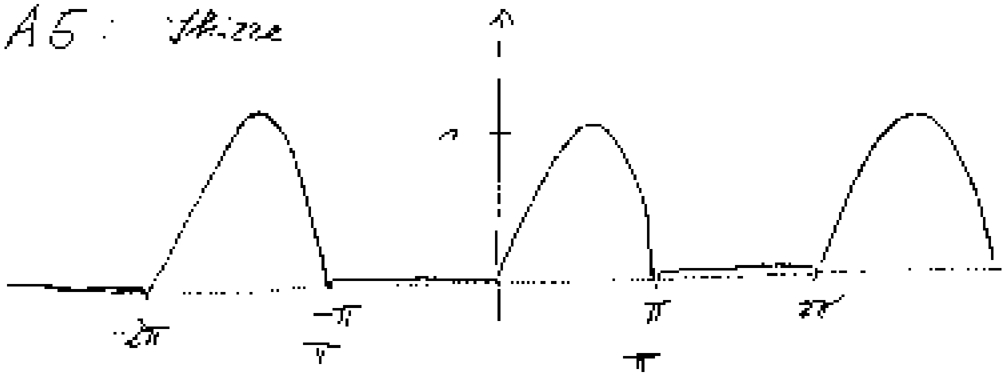
$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

2.) Für $x = \pi$ erhalten wir aus $(*)$

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k \cdot (-1)^k}{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2}$$

A5: Skizze



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$k \in \mathbb{N},\ k > 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\cos x \cdot \cos kx\Big|_0^{\pi} - k\int_0^{\pi} \cos x \cdot \sin kx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left([(-1)^k + 1] - k\sin x \cdot \sin kx\Big|_0^{\pi} + k^2\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos kx\,dx\right)$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^k + 1}{1-k^2} = \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade},\ k \geq 3 \\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4n^2}, & k = 2n,\ \text{gerade} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x\,dx = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(x - \sin x \cos x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$k \in \mathbb{N},\ k > 1$

$$\pi \cdot b_k = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin(kx)\,dx = -\cos x \cdot \sin kx\Big|_0^{\pi} + k\int_0^{\pi} \cos x \cdot \cos kx\,dx$$

$$\Rightarrow (1-k^2)\int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin kx\,dx = 0$$

$$\Rightarrow b_k = 0,\quad k > 1$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\cos 2kx}{1-4k^2}$$

A5 (Fortsetzung)

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}\right| \le \sum \frac{1}{4k^2-1} \le \sum \frac{1}{4k^2-k^2}$$

$$= \frac{1}{3}\sum \frac{1}{k^2} < \infty$$

Da auf der rechten Seite eine konvergente Reihe steht (unabhängig von $x \in \mathbb{R}$), konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$.