3. Übung zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (Potenzreihen und Taylorreihen) (6 Punkte)
Wir wollen den Satz 7.21 beweisen. Sei dazu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei die Reihe den Konvergenzradius $R > 0$ habe.

1. Zeige, dass f auf $(-R, R)$ unendlich oft differenzierbar ist und dass gilt
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$
2. Folgere $f^{(k)}(0) = k! a_k$.
3. Beweise: f ist auf $(-R, R)$ reell analytisch und die Taylorreihe von f um dem Punkt 0 stimmt auf diesem Intervall mit der Potenzreihe überein.
4. Finde eine elegante Lösung zu der Klausuraufgabe:
Berechne das Taylor-Polynom 3. Grades um den Entwicklungspunkt 0 der Funktion
$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

1. Wir machen Induktion nach k.
Für $k = 0$ ist das Ergebnis offenbar richtig.
Sei also schon gezeigt, dass f k-mal differenzierbar ist und dass
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n)!} a_{n+k} x^n$$
gilt und dass der Konvergenzradius wieder R ist.
Dann gilt nach Satz 9.14, dass
$$f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n)!} n a_{n+k} x^{n-1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-(k+1))!} a_n x^{n-(k+1)}.$$
Also gilt die Behauptung nach Induktion.

2.
$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_{n+k} 0^{n-k} = \frac{k!}{(k-k)!} a_k = k! a_k$$

3. Die Taylorreihe ist gegeben durch
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{n!} x^n = f(x)$$
und konvergent auf $(-R, R)$.

4.
$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = x^2 \frac{1}{1-x^2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2k+2} = 0 + x^2 + 0 + x^4 + \ldots$$
Also ist das Taylorpolynom vom Grad 3 am Entwicklungspunkt 0 gleich x^2.

A 2 (^{P} Gegenbeispiele zum Satz von Dini) (3 Punkte)
Der Satz von Dini (Übung 2) benötigt die drei folgenden Voraussetzungen:

- Das Intervall I ist kompakt.
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in I$ (Monotonie in jedem Punkt x).

- Die Grenzfunktion ist stetig.

Finde jeweils eine Folge $(f_n) \subset C(I;\mathbb{R})$, die punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und die jeweils eine der drei Voraussetzungen nicht erfüllt (aber beide anderen), und so dass die Konvergenz $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ nicht gleichmäßig ist.

1. *I nicht kompakt: Sei $I = (0,1)$, $f_n = -x^n$ und $f = 0$.*
2. *(f_n) nicht monoton: Sei $\phi(x) = 1-(x-1)^2$ für $x \in [1,2]$ und $\phi(x) = 0$ sonst und setze $I = [0,1]$, $f_n(x) = \phi(nx)$ und $f(x) = 0$.*
3. *Die Grenzfunktion nicht stetig: $I = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ und $f(x) = 0$ auf $[0,1)$ und 1 für $x = 1$.*

A 3 (Gleichmäßige Konvergenz und Integrale) (3 Punkte)
Zeige, dass die Folge von Funktionen (f_n) mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, jedoch

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = 1 \neq \int_0^\infty 0dx.$$

Widerspricht dies Satz 9.12 (a)?

Sei $\phi(x) = xe^{-x}$ für $x \in [0,\infty]$. Dann ist ϕ stetig mit $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$. Also ist ϕ beschränkt. Es folgt

$$|f_n(x) - 0| = \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}} = \frac{1}{n}\phi(\frac{x}{n}) \leq \frac{1}{n}\|\phi\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gleichmäßig in x, weil $\frac{1}{n}\|\phi\|_\infty$ nicht mehr von x abhängt.
Aber nach partieller Integration gilt

$$\int f_n(x)dx = \frac{1}{n^2}\left(-(xne^{-\frac{x}{n}})|_0^\infty + \int_0^\infty ne^{-\frac{x}{n}}dx\right) = \frac{1}{n^2}(-n^2)e^{-\frac{x}{n}}\Big|_0^\infty = 1.$$

Natürlich ist das kein Widerspruch zu Satz 9.12, weil das Intervall nicht beschränkt ist.

A 4 (Ein paar Beispielfolgen) (6 Punkte)
Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5];$ (b ^{P}) $\sum_{n=1}^\infty \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1];$

(c) $g_n = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

1. *Für $x \in (0,5]$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{x}^3 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1$$

Für x=0 ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

Also ist (f_n) punktweise konvergent auf [0,5] mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \quad x = 0 \\ & \text{für} \\ 1 & \quad x \in (0,5] \end{cases}.$$

Da f nicht stetig ist, aber f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig auf [0,5] ist, kann (f_n) auf [0,5] nicht gleichmäßig konvergieren.

2. *Für alle $x \in [0,1]$ gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{nx^2}{n^3+x^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

   Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig auf [0,1] nach Satz 9.8. Damit konvergiert sie insbesondere auch punktweise.

3. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n} = 0$ und da die Sinus-Funktion stetig ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\frac{x}{n}) = \sin(0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*
   Also konvergiert (g_n) punktweise gegen die Nullfunktion.
   Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn:

   Setze $x_n = \frac{n\pi}{2}$. Dann gilt $g_n(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   Also ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)-g(x)|] &= \lim_{n\to\infty}[\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)|]\\ &\geq \lim_{n\to\infty} 1 = 1 > 0\end{aligned}$$

   Damit kann (g_n) nicht gleichmäßig konvergieren.

A 5 (Der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen) (5 Punkte)
Auf der Menge $C^1([0,1])$ der stetig differenzierbaren Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung $\|\cdot\|$ durch

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

für $f \in C^1([0,1])$.

1. Zeige, dass $C^1([0,1])$ ein Untervektorraum des Raumes der stetigen Funktionen $C([0,1])$ ist und dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C^1([0,1])$ ist.
2. Zeige, dass $(C^1([0,1]), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

1. *Da Summen und skalare Vielfache differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind, ist $C^1([0,1])$ ein Untervektorraum von $C([0,1])$.*
   Wir zeigen nun, dass $\|\cdot\|$ die Eingenschaften der Norm erfüllt. Dabei verwenden wir jeweils die Tatsache, dass $\|\cdot\|_\infty$ diese Eigenschaften hat.
   - $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \geq \|f\|_\infty \geq 0$, *wobei „=" genau dann gilt, wenn $f = 0$.*
   - *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1([0,1])$ gilt*

   $$\|\alpha f\| = \|\alpha f\|_\infty + \|\alpha f'\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty + |\alpha|\|f'\|_\infty = |\alpha|\|f\|.$$

   - *Für $f, g \in C^1([0,1])$ gilt*

   $$\|f+g\| = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\| + \|g\|.$$

2. *Es bleibt zu zeigen, dass $C^1([0,1])$ vollständig ist.*
   Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $C^1([0,1])$. Dann ist (f_n) auch eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, denn $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon$, falls $n, m > M$ und M geeignet. Genauso sieht man, dass (f'_n) eine gleichmäßige Cauchyfolge ist. Da $C([0,1])$ ein Banachraum ist, gibt es ein $f \in C([0,1])$ und $g \in C([0,1])$, so dass

   $$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \quad \text{und} \quad f'_n \to g \quad \text{geichmäßig.}$$

   Nach Satz 9.13 konvergiert (f'_n) gleichmäßig gegen $f' = g$. Also gilt

   $$\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - f'\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

   Also ist jede Cauchyfolge in $C^1([0,1])$ konvergent und die Vollständigkeit ist gezeigt.