Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Mai 2006

3. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Potenzreihen und Taylorreihen) (6 Punkte)
Wir wollen den Satz 7.21 beweisen. Sei dazu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei die Reihe den Konvergenzradius $R > 0$ habe.

1. Zeige, dass f auf $(-R, R)$ unendlich oft differenzierbar ist und dass gilt
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$
2. Folgere $f^{(k)}(0) = k! a_k$.
3. Beweise: f ist auf $(-R, R)$ reell analytisch und die Taylorreihe von f um dem Punkt 0 stimmt auf diesem Intervall mit der Potenzreihe überein.
4. Finde eine elegante Lösung zu der Klausuraufgabe:
Berechne das Taylor-Polynom 3. Grades um den Entwicklungspunkt 0 der Funktion
$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

A 2 (^{P} Gegenbeispiele zum Satz von Dini) (3 Punkte)
Der Satz von Dini (Übung 2) benötigt die drei folgenden Voraussetzungen:

- Das Intervall I ist kompakt.
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in I$ (Monotonie in jedem Punkt x).
- Die Grenzfunktion ist stetig.

Finde jeweils eine Folge $(f_n) \subset C(I; \mathbb{R})$, die punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und die jeweils eine der drei Voraussetzungen nicht erfüllt (aber beide anderen), und so dass die Konvergenz $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ nicht gleichmäßig ist.

A 3 (Gleichmäßige Konvergenz und Integrale) (3 Punkte)
Zeige, dass die Folge von Funktionen (f_n) mit $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, jedoch
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = 1 \neq \int_0^{\infty} 0dx.$$

Widerspricht dies Satz 9.12 (a)?

A 4 (Ein paar Beispielfolgen) (6 Punkte)
Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2 x^3}$, $\quad x \in [0, 5]$;

(b ^{P}) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$, $\quad x \in [0, 1]$;

(c) $g_n = \sin \frac{x}{n}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

A 5 (Der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen) (5 Punkte)
Auf der Menge $C^1([0,1])$ der stetig differenzierbaren Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung $\|\cdot\|$ durch

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

für $f \in C^1([0,1])$.

1. Zeige, dass $C^1([0,1])$ ein Untervektorraum des Raumes der stetigen Funktionen $C([0,1])$ ist und dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C^1([0,1])$ ist.
2. Zeige, dass $(C^1([0,1]), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.