~~Aufgabe~~ A1

Wir haben zu zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt, \quad \lim_{R\to\infty} \int_1^R t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

existieren.

Für alle $t>0$ und $x>0$ ist $0 < t^{x-1} e^{-t} < t^{x-1}$, und da das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{t^x}{x}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{x}$$

für alle $x>0$ existiert, können wir abschätzen:

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1} e^{-t}dt \le \int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt \le \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$$

Für $\varepsilon \to 0$ wächst die linke Seite dieser Ungleichung monoton und bleibt dabei nach oben beschränkt. Also existiert der Grenzwert für $\varepsilon\to 0$.

Nach der l'Hospital'schen Regel erhalten wir

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{nt^{n-1}}{e^t} = \dots = \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{e^t} = 0$$

Das bedeutet $\forall x>0$ $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$. Also existiert eine Zahl $b>0$, so dass

$$\frac{t^{x+1}}{e^t} \le 1 \quad \text{für alle} \quad t \ge b,$$

(Das folgt aus der Definition des Grenzwertes, wähle $\varepsilon = 1$.)

Also: $t^{x-1} e^{-t} \le \frac{1}{t^2}$ für alle $t \ge b$.

Da das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{t^2}dt = \frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^\infty = 1$

existiert, erhält man wie oben auch die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}dt.$$

(b) Partielle Integration ergibt

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}dt = -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R x t^{x-1} e^{-t}dt$$

$$= \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - R^x e^{-R} + x \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}dt$$

Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ und $R\to\infty$ ergibt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{für alle } x>0.$$

Insbesondere ist für $n = 1,2,3,\dots$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots = (n-1)!\,\Gamma(1)$$

Für $\Gamma(1)$ finden wir

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t}dt = \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-t}\right)_0^R = 1.$$

Damit ist $\Gamma(n) = (n-1)!$

(c) Wähle $\frac{1}{p} = \lambda$ und $\frac{1}{q} = 1-\lambda$. Dann ist zu beweisen, dass

$$\int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\,dt \le \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Wir definieren also $f(t) = \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{p}}$ und $g(t) = \left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{q}}$

Dann ist

$$f(t)\cdot g(t) = t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot e^{-\frac{t}{p}-\frac{t}{q}} =$$

$$= t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1}\cdot e^{-t}$$

Die Hölder'sche Ungleichung liefert

$$\int_\varepsilon^R t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\,dt \le \left(\int_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\varepsilon^R t^{y-1}e^{-t}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

und nach Grenzübergang folgt die Behauptung.

d) Sei $0<\lambda<1$.

Da $n+\lambda = \lambda(n+1)+(1-\lambda)n$, erhalten wir

$$\Gamma(n+\lambda) = \Gamma(\lambda(n+1)+(1-\lambda)n) \le (\Gamma(n+1))^{\lambda}\cdot\Gamma(n)^{1-\lambda}$$

$$= n^{\lambda}\,\Gamma(n)^{\lambda}\cdot\Gamma(n)^{1-\lambda} = (n-1)!\,n^{\lambda}$$

Da $n+1 = \lambda(n+\lambda)+(1-\lambda)(n+\lambda+1)$, erhalten wir

$$n! = \Gamma(n+1) = \Gamma(\lambda(n+\lambda)+(1-\lambda)(n+\lambda+1)) \le$$

$$\le \Gamma(n+\lambda)^{\lambda}\cdot\Gamma(n+\lambda+1)^{1-\lambda} =$$

$$= \Gamma(n+\lambda)^{\lambda}\cdot(n+\lambda)^{1-\lambda}\cdot\Gamma(n+\lambda)^{1-\lambda} =$$

$$= \Gamma(n+\lambda)\cdot(n+\lambda)^{1-\lambda}$$

oder auch $n!\cdot(n+\lambda)^{\lambda-1} \le \Gamma(n+\lambda)$.

Damit erhalten wir

$$\left(\frac{n+\lambda}{n}\right)^{\lambda} \le \frac{(n+\lambda)(n-1+\lambda)\dots(\lambda+1)\lambda\,\Gamma(\lambda)}{n!\,n^{\lambda}} \le \frac{n+\lambda}{n}$$

also gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n^{\lambda}}{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n)} = \Gamma(\lambda)$ für $0<\lambda<1$.

Die letzte Formel stimmt auch, wenn $\lambda=1$, da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{1}}{1(2)\cdots(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \Gamma(1).$$

Wir müssen daher noch zeigen: ist die Formel für ein $x>0$ richtig, so gilt sie auch für $y := x+1$.

Nun ist

$$\Gamma(y) = \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{x}}{(x+1)\dots(x+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{y-1}}{y(y+1)\dots(y+n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{y-1}}{y(y+1)\dots(y+n-1)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{y+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{y}}{y(y+1)\dots(y+n)}$$

A2

Ist $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $0 < x < 1$, so gilt für jedes feste $x \in (0,1)$ sicher $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$; $(f_n)_n$ konvergiert also punktweise gegen die Nullfunktion.

Sei nun $a > 0$. Anhand von

$f_n'(x) = \frac{-n}{(1+nx)^2} < 0$ schließen wir, daß f_n eine monoton fallende Funktion ist, also

$\sup\{ f_n(x) \mid a \leq x < 1 \} = f_n(a) = \frac{1}{1+na}$

Damit folgt aber $\| f_n|_{[a,1)} \|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. f_n konvergiert auf $[a,1)$ gleichmäßig gegen 0.

Aus der Monotonie folgt aber auch

$\| f_n \|_\infty = \sup\{ f_n(x) \mid 0 < x < 1 \} = \lim_{a \searrow 0} \frac{1}{1+na} = 1$.

Also ist $0 \neq \| f_n \|_\infty$, und $(f_n)_n$ kann auf $(0,1)$ nicht gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

A3 a) Die Vermutung bedeutet:

"Für alle $x \in M$ sind die Zahlenfolgen $(f_n(x))_n$ und $(g_n(x))_n$ konvergent."

Nach den Konvergenzsätzen aus Analysis I ist dann auch das Produkt der beiden Zahlenfolgen, $(f_n(x) \cdot g_n(x))_n$ konvergent für alle $x \in M$.

b) Vermutung: $f_n \xrightarrow[\text{auf } \mathbb{R}]{\text{glm.}} f: x \mapsto x$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Betrachte $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x + \frac{1}{n} - x| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$,

wenn nur $n \geq n_0$ ist.

Also konvergiert f_n auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig.

c) (1) Vermutung: $(\forall x \in \mathbb{R})\ f_n^2(x) \longrightarrow f^2(x) = x^2$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig festgehalten.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $n \geq n_0$.

$|f_n^2(x) - f^2(x)| = |(x + \frac{1}{n})^2 - x^2| =$

$= |x^2 + \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2} - x^2| = \frac{1}{n} |2x + \frac{1}{n}| \leq$

$\leq \frac{1}{n}(2|x|+1) \leq \frac{1}{n_0}(2|x|+1) < \varepsilon$

$\boxed{\text{folgt } n_0 > \frac{2|x|+1}{\varepsilon}}$

Also konvergiert $(f_n^2(x))_n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen x^2.

(2) zu zeigen: (f_n^2) konvergiert nicht gleichmäßig gegen $x \mapsto x^2$.

glm. Konv. heißt: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \|f_n^2 - f^2\|_\infty < \varepsilon$

Um zu zeigen, daß keine glm. Konvergenz vorliegt, können wir also ein $\varepsilon > 0$ wählen, z.B. $\varepsilon = 1$.

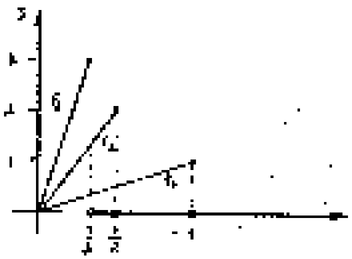
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$\|f_n^2 - f^2\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^2(x) - f^2(x)| \geq |f_n^2(n) - f^2(n)|$

$= (n + \frac{1}{n})^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 1 = \varepsilon$.

Aufgabe 4 A4

a)



b) $(\forall n \in \mathbb{N}: f_n(0) = 0 \rightarrow 0 \; (n \to \infty))$

Für $0 < x \leq 1$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{1}{n_0} < x$ für $n \geq n_0$.

Dann gilt für alle $n \geq n_0$, daß $f_n(x) = 0$ ist.

(f_n ist für gerade definiert!)

Also strebt $f_n(x) \rightarrow 0$ punktweise.

c) Konvergenz von $f_n \rightarrow 0$ im quadratischen Mittel bedeutet $\|f_n - 0\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x) - 0|^2 dx \rightarrow 0 \; (n \to \infty)$.

Wir rechnen aber nach:

$$\|f_n - 0\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (n^2 x)^2 dx$$

$$= n^4 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} n \rightarrow \infty \; (n \to \infty)$$

?

Also konvergiert $f_n \not\rightarrow 0$ im quadratischen Mittel.

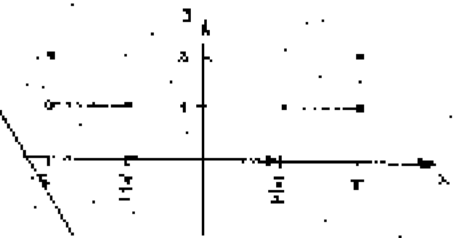
Zur gleichmäßigen Konvergenz:

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, \frac{1}{n}]} |n^2 x| = n \rightarrow \infty \; (n \to \infty)$$

Damit liegt auch keine glm. Konvergenz auf $[0,1]$ vor.

Aufgabe 5

a)



f ist eine gerade Funktion, also ist die Fourierreihe von f eine reine Kosinusreihe, alle b_k sind $= 0$.

b) $k = 0$: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$.

$k \in \mathbb{N}$: $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos kx\, dx =$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$\sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2l \\ (-1)^{l+1} & \text{für } k = 2l-1 \end{cases} \quad (l \in \mathbb{N}).$$

Also folgt für die Fourierreihe

$$f \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^l}{2l-1} \cos((2l-1)x).$$

c) f ist stückweise stetig differenzierbar, 2π-periodisch, nach Dirichlet $\Rightarrow$ n. Satz 7.16 gilt

$$s(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x| = \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \\ 1 & \text{für } |x| = \pi \end{cases}$$

(A6) Sei $f_n(x) = \sin^n(x)$, $x \in [0,\pi]$.

Falls $x \neq \frac{\pi}{2}$, so ist $0 \le \sin(x) < 1$ und daher $0 = \lim_{n\to\infty} \sin^n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(x) = 1$ und daher $f_n(x) = 1$ für alle n, also $\lim_{n\to\infty} f_n(\frac{\pi}{2}) = 1$. Die Grenzfunktion ist also $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \in [0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$

Wegen $f(\frac{\pi}{2}) = f_n(\frac{\pi}{2})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

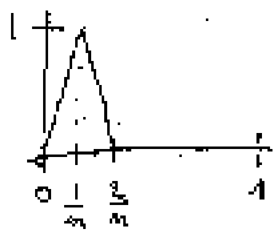
$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi]} |f_n(x)| = 1.$$

Es liegt also keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Was bedeutet das im Hinblick auf den Satz von Dini? Die f_n sind eine fallende Folge: $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ für alle $x \in [0,\pi]$ und $n \in \mathbb{N}$. Sie konvergieren punktweise gegen f. Aber f ist nicht stetig! Auf die Forderung (iii) kann also nicht verzichtet werden.

(2) Wir definieren g_n wie folgt (für $n \ge 2$):

(1.



$$g_n(x) = \begin{cases} n x, & x \in [0,\frac{1}{n}] \\ 1 - n(x - \frac{1}{n}), & x \in (\frac{1}{n},\frac{2}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{2}{n},1] \end{cases}$$

Für festes $x_0 \in [0,1]$ ist $\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = 0$. Denn für $x_0 = 0$ gilt dies trivialerweise, und für $x_0 > 0$ finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{N} < x_0$, also ist $g_n(x_0) = 0$ für alle $n \ge N$.

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da $\|g_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x)| = 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Mit $f_n \le f_{n+1}$ und der Grenzfunktion f setzen wir $g_n := f - f_n$.

Da $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, ist $g_n(x) \ge 0$ für alle $x \in X$.

Da f und alle Funktionen f_n stetig sind, sind auch die g_n stetig.