Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Mai 2006

# 2. Übung zur Analysis II

## Aufgaben

**A 1 ($\Gamma$-Funktion: 8P)**

Für $x > 0$ definiert man die $\Gamma$-Funktion durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt\,.$$

1. Zeigen Sie, dass dieses Integral als uneigentliches Integral existiert.
2. Beweisen Sie, dass $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ für alle $x > 0$ und berechnen Sie $\Gamma(n)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$
3. Beweisen Sie, dass die Funktion $\Gamma$ **logarithmisch-konvex** ist, d.h.
$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \Gamma(x)^\lambda\, \Gamma(y)^{1-\lambda} \text{ für } 0 < \lambda < 1 \text{ und alle } x, y > 0.$$
Benutzen Sie dazu die Höldersche Ungleichung.
4. Beweisen Sie, dass $n!\,(n+\lambda)^{\lambda-1} \le \Gamma(n+\lambda) \le (n-1)!n^\lambda$ für $0 < \lambda < 1$ und $n \ge 1$ und schließen Sie daraus, dass
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \text{ für alle } x > 0\,.$$

**A 2 (Punktweise und gleichmässige Konvergenz 3P)**

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : (0,1) \mapsto \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf jedem Intervall $[a, 1)$ mit $a > 0$ gleichmässig, aber auf dem ganzen Intervall $(0, 1)$ nicht gleichmässig, sondern nur punktweise konvergiert.

**A 3 (Funktionenfolgen 3P)**

1. Vorgelegt seien Funktionen $f_n, g_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $M \subseteq \mathbb{R}$ punktweise konvergieren. Zeigen Sie, dass auch das Produkt $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $M$ punktweise konvergiert.
2. Gilt die Aussage aus 1.) auch für gleichmässige Konvergenz? Dazu betrachte man $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Begründen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig auf $\mathbb{R}$, die Funktionenfolge $(f_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise, aber nicht gleichmässig auf $M$ konvergiert.

**A 4 (Funktionenfolgen 3P)**

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2\, x & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < x \le 1\,. \end{cases}$$

1. Skizzieren Sie $f_n$ für $n = 1, 2, 3$.
2. Zeigen Sie: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $x \in [0,1]$ (punktweise) gegen 0.

3. Zeigen Sie, dass die Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig ist.

**(Satz von Dini)**

Es sei $I$ ein kompaktes Intervall und $f_n \in C(I;\mathbb{R})$ eine Folge stetiger Funktionen mit folgender Eigenschaft:

1. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$ (Monotonie in jedem Punkt $x$).
2. die Folge $f_n$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f$.
3. die Grenzfunktion $f$ ist stetig.

Dann konvergiert die Folge $f_n$ auch gleichmässig gegen $f$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty := \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

Analog kann man den Satz natürlich auch für $f_n \geq f_{n+1}$ formulieren.

**A 5 (Funktionenfolgen: 3P, vorführen)**

Es sei $f_n : [0,\pi] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n(x)$. Zeigen Sie: die Folge $f_n$ konvergiert punktweise und bestimmen Sie die Grenzfunktion $f(x)$. Berechnen Sie

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - f(x)|\,.$$

Ist die Konvergenz gleichmässig? Was bedeutet das im Hinblick auf den Satz von Dini?