# 1. Übung zur Analysis II, Lösungsvorschlag

## Aufgaben

**A 1 (Stammfunktionen)** (4 Punkte)
Wir betrachten zwei Funktionen $F, G : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) = -\arctan x\,, \qquad G(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$$

definiert sind.

a) Zeige, dass $F$ und $G$ Stammfunktionen derselben Funktion $f$ sind und bestimme $f$.

b) Welche Form haben alle Stammfunktionen von $f$?

c) Bestimme eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in (-1, \infty)$ die Gleichung $G(x) = F(x) + c$ gilt.

*a) Es ist $F(x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. Andererseits ist mit der Kettenregel*

$$\begin{aligned} G(x)' &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \\ &= \frac{-2}{(1+x)^2} \frac{1}{1+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}} \\ &= \frac{-2}{2+2x^2} = -\frac{1}{1+x^2} = F'(x)\,. \end{aligned}$$

*Es ist damit $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.*

*b) Die Stammfunktionen von $f$ sind von der Form $F(x) = -\arctan(x) + c$.*

*c) Es ist $F(0) = 0$ und $G(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Also ist $F(x) = G(x) + c$ mit $c = -\frac{\pi}{4}$.*

**A 2 (Partialbruchzerlegung)** (4 Punkte)
Bestimme die folgenden Integrale mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$.

*a) Die Nullstellen von $q(x) = x^2 + x - 6$ sind $2$ und $-3$. Also lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung*

$$\frac{2x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-2}.$$

*Das zugehörige LGS*

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2 \\ -2A_1 + 3A_2 &= 1 \end{aligned}$$

*hat die Lösung $A_1 = A_2 = 1$. Also:*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= [\ln|x+3| + \ln|x-2|]_{-1}^{1} = \ln(2) - \ln(3). \end{aligned}$$

*b) Für die Partialbruchzerlegung von $\frac{x}{(x+1)^3}$ ist der Ansatz*

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}.$$

*erforderlich. Als LGS erhält man*

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ 2A_1 + A_2 &= 1 \\ A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \end{aligned}$$

*und somit $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = -1$. Schließlich:*

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

**A 3 (Substitution und partielles Integrieren)** (4 Punkte)

1. Berechne
$$(i)\ \int_0^2 xe^{x^2}\,dx, \quad (ii)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \cos^3 x)dx$$
mittels Substitution.
2. Berechne das unbestimmte Integral
$$\int \sin^4 x\,dx$$
mit partieller Integration.

*1.*

$$(i)\quad \int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x)e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^y dy = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

$$(ii)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \cos^3 x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin^2 x)\cos x\,dx = \int_{-1}^{1} (2 - y^2)dy = [2y - \frac{1}{3}y^3]_{-1}^1 = 4 - \frac{2}{3}.$$

*2.Partielles Integrieren liefert*

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x\,dx &= -\sin 3x \cos x - \int 3\sin^2 x \cos x(-\cos x)dx \\ &= -\sin 3x \cos x - \int 3\sin^2 x(\sin^2 - 1)dx. \end{aligned}$$

*Stellt man die Gleichung nach $\int \sin^4 x\,dx$ um, so erhält man*

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin 3x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x dx.$$

*Wiederholt man das selbe Argument noch einmal, so sieht man*

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin 3x\cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int 1\,dx\right) = -\frac{1}{4}\sin 3x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x$$

**A 4** ($^P$ **Ein alter Bekannter)** (2 Punkte)
Sei die Funktion $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Zeige, indem Du nur die Integrationsregeln, aber keine Vorkenntnisse über die Logarithmusfunktion verwendest, dass für $u, v \in \mathbb{R}^+$

$$L(uv) = L(u) + L(v)$$

gilt

$$L(uv) = \int_1^{uv} \frac{1}{t} dt = \int_{\frac{1}{v}}^{u} \frac{1}{vx} v dx = L(u) + \int_{\frac{1}{v}}^{1} \frac{1}{x} dx = L(u) + \int_1^{v} \frac{1}{\frac{t}{v}} \frac{1}{v} dt = L(u) + L(v).$$

**A 5** ($^P$ **Periodische Stammfunktionen)** (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische Funktion und $F$ eine Stammfunktion von $f$. Finde eine Bedingung, die sicherstellt, dass $F$ auch $2\pi$-periodisch ist. Beweise, dass die gefundene Bedingung notwendig und hinreichend ist.

*Das ist genau dann der Fall, wenn* $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.
„$\Rightarrow$" *Sei* $F$ $2\pi$*-periodisch. Dann gilt*

$$0 = F(2\pi) - F(0) = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

„$\Leftarrow$" *Sei* $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) - F(x) &= \int_x^{x+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_0^{x+2\pi} f(t)dt - \int_0^{x} f(t)dt \\ &= \int_0^{x+2\pi} f(t)dt - \int_0^{x} f(t+2\pi)dt \\ &= \int_0^{x+2\pi} f(t)dt - \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0. \end{aligned}$$

*Also ist* $F$ $2\pi$*-periodisch.*