9 Folgen und Reihen von Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir verschiedene Arten der Konvergenz einer Funktionenfolge. Besonders interessiert uns die Frage, ob sich Eigenschaften der einzelnen Glieder einer konvergenten Funktionenfolge (f_n) auf die Grenzfunktion f vererben, etwa

- ist f stetig, wenn alle f_n stetig sind?
- ist f differenzierbar (integrierbar), wenn alle f_n differenzierbar (integrierbar) sind, und gilt in diesem Fall

$$f' = (\lim f_n)' = \lim f_n' \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b f_n(x)dx?$$

In diesen Fragen geht es letztlich darum, ob zwei *Grenzprozesse vertauscht* werden können. Ein Beispiel, wo dieses Vertauschen erlaubt ist, haben wir in Abschnitt 6.3 kennengelernt: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so gilt für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < R$

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lim_{z \to z_0} z)^n.$$

Wir gehen diese Probleme nun systematischer an und betrachten anschließend zwei spezielle Klassen von Funktionenreihen: Potenzreihen und Fourierreihen.

9.1 Punktweise Konvergenz

Sei M eine nichtleere Menge, N ein metrischer Raum mit einer Metrik d und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n : M \to N$ gegeben. Dann heißt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Funktionenfolge* auf M (beachten Sie: alle Glieder einer Funktionenfolge sind auf der gleichen Menge definiert und bilden in eine gleiche Menge hinein ab).

Definition 9.1 *Die Funktionenfolge* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert *auf* M punktweise *gegen eine Funktion* $f : M \to N$, *wenn für jedes* $x \in M$ *gilt*

$$d\Big(f_n(x), f(x)\Big) \to 0 \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Der punktweise Grenzwert einer Funktionenfolge (f_n) ist eindeutig bestimmt.

Beispiel 1 Die Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ seien durch $f_n(x) = x^n$ gegeben. Für $0 \le x < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$, während $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Die stetigen (und sogar differenzierbaren) Funktionen f_n konvergieren also punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1, \end{cases}$$

die im Punkt 1 *nicht* stetig ist. ■

Beispiel 2 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f_n(x) := \lim_{k\to\infty} \Big(\cos(n!\pi x)\Big)^{2k}$$

(der Grenzwert existiert, da $0 \leq (\cos(n!\pi x))^2 \leq 1$). Wir zeigen, dass die Folge (f_n) punktweise gegen die Dirichletfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

konvergiert. Sei zunächst $x = p/q$ rational. Für beliebiges k und $n \geq q$ ist dann

$$\Big(\cos(n!\pi \frac{p}{q})\Big)^{2k} = 1.$$

Es ist also $f_n(x) = 1$ für alle $n \geq q$, woraus sofort folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{für } x \text{ rational.}$$

Ist dagegen x irrational, so ist $n!x$ niemals ganzzahlig. Es ist daher in diesem Fall

$$0 \leq \Big(\cos(n!\pi x)\Big)^2 < 1,$$

woraus für jedes n folgt

$$f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \Big(\cos(n!\pi x)\Big)^{2k} = 0.$$

Es ist daher

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{für } x \text{ irrational.}$$

Bildet man also von den (beliebig oft differenzierbaren!) Funktionen

$$x \mapsto \Big(\cos(x!\pi x)\Big)^{2k}$$

erst den punktweisen Grenzwert bzgl. k und dann bzgl. n, so erhält man eine Funktion, die in keinem Punkt stetig ist! ■

Der durch die punktweise Konvergenz hergestellte Zusammenhang zwischen der Folge (f_n) und ihrer Grenzfunktion f ist offenbar zu schwach, um z.B. das Vererben der Stetigkeit zu garantieren. Im nächsten Abschnitt betrachten wir einen wesentlich stärkeren Konvergenzbegriff.

9.2 Gleichmäßige Konvergenz

Sei X eine nichtleere Menge, (N, d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : X \to N$.

Definition 9.2 *Die Funktionenfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf X gleichmäßig *gegen die Funktion* $f : X \to N$*, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$d\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon \quad \textit{für alle } n \geq n_0 \textit{ und alle } x \in X.$$

Beachten Sie: Bei punktweiser Konvergenz hängt n_0 i.Allg. von x ab, während bei gleichmäßiger Konvergenz n_0 *unabhängig* von x gefunden werden kann. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt offenbar die punktweise Konvergenz.

Beispiel 1 Die Funktionenfolgen aus den Beispielen 1, 2 aus 9.1 konvergieren *nicht* gleichmäßig. Wir überlegen uns dies für Beispiel 1. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in (0, 1)$. Wegen

$$|x^n - 0| < \varepsilon \Longleftrightarrow x^n < \varepsilon \Longleftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \Longleftrightarrow n > \ln \varepsilon / \ln x$$

kann es kein n_0 so geben, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $x \in M$. ■

Beispiel 2 Auf $\mathbb{R}$ sei $f_n(x) := \frac{1}{n}[nx]$ ($[y]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner als oder gleich y ist.) Aus $[nx] \leq nx < [nx] + 1$ folgt

$$\frac{1}{n}[nx] \leq x \leq \frac{1}{n}[nx] + \frac{1}{n} \quad \text{bzw.} \quad f_n(x) \leq x \leq f_n(x) + \frac{1}{n},$$

d.h. es ist

$$0 \leq x - f_n(x) < \frac{1}{n} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt sofort die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen f_n gegen die Funktion $f(x) = x$. ■

Im Weitern sei $N = \mathbb{R}$, versehen mit dem üblichen Abstand. Alle Überlegungen dieses Abschnittes bleiben aber auch für $N = \mathbb{R}^k$ (z.B. mit der Euklidschen Norm) und insbesondere für $N = \mathbb{C}$ (mit dem üblichen Abstand) richtig. Wir zeigen, dass man die gleichmäßige Konvergenz als Konvergenz in einem geeigneten metrischen Raum (dessen Elemente Funktionen sind) auffassen kann.

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn

$$||f||_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty, \tag{9.1}$$

und die Zahl $||f||_\infty$ heißt die *Supremumsnorm* von f. Es ist klar, dass die Menge $M(X)$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf X einen reellen linearen Raum bildet und dass (9.1) ein Norm auf $M(X)$ in folgendem Sinn definiert:

Definition 9.3 *Sei L ein reeller linearer Raum. Eine Abbildung $||.|| : L \to \mathbb{R}$ heißt* Norm *auf L, wenn*

- $||x|| \geq 0$ *für alle $x \in L$, und $||x|| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.*
- $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$ *für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in L$.*
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *für alle $x, y \in L$ (Dreiecksungleichung).*

Für die Norm (9.1) folgt die letzte dieser Eigenschaften aus

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \,,$$

indem man auf der linken Seite das Supremum über alle $x \in X$ bildet.

Lemma 9.4 *Ist L ein linearer Raum und $||.||$ eine Norm auf L, so wird durch $d(x, y) := ||x - y||$ eine Metrik auf L definiert.*

Beweis Aus dem ersten Normaxiom folgt

$$d(x, y) \geq 0 \quad \text{sowie} \quad d(x, y) = 0 \iff ||x - y|| = 0 \iff x = y \,.$$

Aus dem zweiten Normaxiom erhalten wir die Symmetrie von d:

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||-(y - x)|| = |-1| \, ||y - x|| = d(y, x) \,.$$

Die Dreiecksungleichung für d ist eine unmittelbare Folgerung des dritten Normaxioms. ■

Man nennt $d(x, y) := ||x - y||$ die durch die Norm $||\cdot||$ *induzierte Metrik*. Solange nichts anderes gesagt ist, versehen wir normierte Räume immer mit den induzierten Metriken und machen sie so zu metrischen Räumen. Man überlegt sich leicht, dass die gleichmäßige Konvergenz einer Folge (f_n) beschränkter reellwertiger Funktionen nichts anderes ist als die Konvergenz dieser Folge im metrischen Raum $M(X)$ mit der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik, d.h. $f_n \to f$ bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \; ||f - f_n||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \,.$$

Definition 9.5 *Ein normierter linearer Raum heißt* Banachraum, *wenn er bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik vollständig ist.*

Einige Beispiele für Banachräume kennen wir bereits: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit den üblichen Beträgen und $\mathbb{R}^k$ mit der $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ oder $||\cdot||_\infty$–Norm.

Satz 9.6 *Der lineare Raum $M(X)$, versehen mit der Norm $||\cdot||_\infty$, ist ein Banachraum.*

Beweis Sei $(f_n) \subseteq M(X)$ eine Cauchyfolge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall m, n \geq n_0 \; : \; d(f_n, f_m) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \, . \tag{9.2}$$

Offenbar ist für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ die Folge $\big(f_n(x)\big)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert die Folge $\big(f_n(x)\big)$ gegen eine Zahl, die wir $f(x)$ nennen. Hierdurch wird eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ festgelegt. Wir zeigen: f ist beschränkt (d.h. $f \in M(X)$) und $d(f, f_n) = ||f - f_n||_\infty \to 0$.

Beschränktheit: Aus (9.2) wissen wir:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geq n_0 \;\; \forall x \in X \; : \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \, .$$

Vollziehen wir hierin den Grenzübergang $m \to \infty$, folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall x \in X \; : \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \, . \tag{9.3}$$

Wir wählen z.B. $\varepsilon = 1$ und das zugehörige n_0 und erhalten

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq ||f_{n_0}||_\infty + 1 \quad \text{für alle } x \in X \, ,$$

d.h. f ist beschränkt. Die *Konvergenz* von f_n gegen f bzgl. der Supremumsnorm folgt ebenfalls sofort aus (9.3). ∎

Insbesondere gilt für die gleichmäßige Konvergenz beschränkter Funktionen das *Cauchykriterium*: Die Folge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn sie eine Cauchyfolge ist, d.h. wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geq n_0 \; : \; ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \, .$$

Wir vermerken noch einige wichtige Konsequenzen der Vollständigkeit des Raumes $M(X)$. Diese gelten entsprechend für beliebige Banachräume.

Seien f_n Funktionen aus $M(X)$. Die *Funktionenreihe* $\sum_{k=0}^\infty f_k$ heißt *punktweise* bzw. *gleichmäßig konvergent*, wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n f_k$ punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert. Aus der Vollständigkeit des Raumes $\big(M(X), \, ||\cdot||_\infty\big)$ folgt sofort das Cauchysche Konvergenzkriterium für Reihen.

Satz 9.7 *Die Reihe* $\sum_{k=0}^\infty f_k$ *konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass für alle* $n \geq n_0$ *und alle* $r \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\Big\| \sum_{k=n}^{n+r} f_k \Big\|_\infty < \varepsilon \, .$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert. Wie im Beweis von Satz 5.9 zeigt man:

Satz 9.8 *Jede absolut konvergente Reihe in einem Banachraum konvergiert gleichmäßig.*

Dieser Satz ist bemerkenswert, da man z.B. statt der gleichmäßigen Konvergenz einer *Funktionenreihe* nur die absolute Konvergenz einer *Zahlenreihe* untersuchen muß, für die wir zahlreiche Kriterien kennen.

Beispiel 3 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ konvergiert für jedes $x > 1$, und sie ist gleichmäßig konvergent auf jedem Intervall $[c, \infty)$ mit $c > 1$. Die Funktionen $f_n(x) = n^{-x}$ sind nämlich auf $[c, \infty)$ streng monoton fallend. Also ist $||f_n||_\infty = n^{-c}$, und für $c > 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$. Die Funktion $\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ heißt die *Riemannsche Zetafunktion.* ∎

Beispiel 4 Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist auf jeder Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ mit $r < R$ gleichmäßig konvergent. Für die Funktionen $f_n(z) = a_n z^n$ ist nämlich

$$||f_n||_\infty = \sup_{|z| \leq r} |a_n z^n| = |a_n| r^n \,,$$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergiert, da jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzbereichs absolut konvergiert (Satz 6.16). ∎

9.3 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

In diesem Abschnitt sei (X, d) ein metrischer Raum, und wir betrachten Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Die Sätze 9.9 und 9.10 lassen sich problemlos auf Funktionen $X \to \mathbb{R}^k$, $k > 1$, übertragen.

Satz 9.9 *Die Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ sollen gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren, und sei $x_0 \in X$. Ist jede der Funktionen f_n in x_0 stetig, so ist auch die Grenzfunktion f in x_0 stetig.*

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen N so, dass $||f - f_N||_\infty < \varepsilon/3$. Dann ist für alle $x \in X$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2||f - f_N||_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| < 2\varepsilon/3 + |f_N(x) - f_N(x_0)| \,. \end{aligned}$$

Da f_N in x_0 stetig ist, finden wir eine Umgebung U von x_0 so, dass $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in U$. Für alle $x \in U$ ist also

$$|f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon/3 + |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon \,.$$

Also ist f in x_0 stetig. ∎

Sind insbesondere alle Funktionen f_n auf ganz X stetig, so ist auch f auf ganz X stetig. Wir interpretieren dies wieder als eine Vollständigkeitsaussage. Sei $C_b(X)$ die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Es ist $C_b(X) \subseteq M(X)$, und $C_b(X)$ ist ein normierter linearer Raum bzgl. der Supremumsnorm. Ist X kompakt, so ist *jede* stetige Funktion auf X beschränkt (Satz 6.39). Die Menge aller *beschränkten* stetigen Funktionen stimmt dann also überein mit der Menge $C(X)$ aller stetigen Funktionen auf X.

Satz 9.10 *Der lineare Raum $C_b(X)$, versehen mit der Supremumsnorm, ist ein Banachraum.*

Beweis Ist (f_n) Cauchyfolge in $C_b(X)$, so ist (f_n) erst recht Cauchyfolge in $M(X)$. Da $M(X)$ vollständig ist, konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine beschränkte Grenzfunktion f. Aus Satz 9.9 wissen wir, dass f stetig ist, also zu $C_b(X)$ gehört. ■

Wir können das Bewiesene auch so formulieren: $C_b(X)$ ist abgeschlossen in $M(X)$ bzgl. $||\cdot||_\infty$. Als eine Anwendung geben wir einen weiteren Beweis von Satz 6.19.

Beispiel Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, und sei $|z_0| < R$. Dann ist f in z_0 stetig. Um dies einzusehen, wählen wir ein r mit $|z_0| < r < R$. Nach Beispiel 4 aus 9.2 konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $X := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ gleichmäßig. Da alle Partialsummen auf X stetig sind, ist f auf X und insbesondere in $z_0 \in X$ stetig. ■

Aus der Stetigkeit der Grenzfunktion folgt aber im Allgemeinen *nicht*, dass die Funktionenfolge gleichmäßig konvergieren muss. Es gilt jedoch:

Satz 9.11 (Dini) *Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die punktweise und monoton (d.h. jede Folge $\big(f_n(x)\big)$ ist monoton) gegen eine stetige Funktion f konvergieren. Dann ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.*

Einen Beweis finden Sie in Barner/Flohr, Analysis I, S. 321.

9.4 Gleichmäßige Konvergenz und Integrierbarkeit/ Differenzierbarkeit

Sei $[a, b]$ ein endliches Intervall. Wir bezeichnen mit $R([a, b])$ die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$. Da Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt sind (Satz 8.4), können wir $R([a, b])$ als Teilraum von $M([a, b])$ auffassen.

Satz 9.12 (a) *Die Funktionen $f_n \in R([a, b])$ sollen gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergieren. Dann ist $f \in R([a, b])$, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \,.$$

(b) *Der lineare Raum $R([a,b])$, versehen mit der Supremumsnorm, ist ein Banachraum.*

Beweis Wir zeigen zuerst, dass f Riemann-integrierbar ist. Sei $\Delta(f_n)$ die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f_n und $U := \bigcup_n \Delta(f_n)$. In allen Punkten $x \in [a,b] \backslash U$ ist jede der Funktionen f_n stetig. Nach Satz 9.9 ist dann auch f in allen diesen Punkten stetig. Also ist $\Delta(f) \subseteq U$. Nach dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium (Satz 8.14) ist jedes $\Delta(f_n)$ eine Nullmenge. Nach Lemma 8.13 sind auch U und $\Delta(f)$ Nullmengen. Wieder nach Satz 8.14 ist $f \in R([a,b])$. Damit ist auch klar, dass $\int_a^b f(x)dx$ existiert, und wir haben die Abschätzung

$$\Big| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \, ||f_n - f||_\infty \, .$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von f_n gegen f folgt nun Behauptung (a). Sei noch (f_n) eine Cauchyfolge Riemann-integrierbarer Funktionen. Dann ist (f_n) Cauchyfolge in $M([a,b])$ und folglich konvergent mit einer Grenzfunktion f. Aus Teil (a) wissen wir, dass $f \in R([a,b])$. Schließlich folgt aus Satz 8.22, dass $R([a,b])$ ein linearer Raum ist. ∎

Interessanterweise genügt die gleichmäßige Konvergenz einer Folge differenzierbarer Funktionen *nicht*, um die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion zu erzwingen. Man benötigt vielmehr die gleichmäßige Konvergenz der abgeleiteten Folge.

Satz 9.13 *Für die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ gelte:*

- *sie sind auf $[a,b]$ differenzierbar.*
- *die Folge (f_n') ihrer Ableitungen konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$.*
- *es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ für das die Folge $\big(f_n(x_0)\big)$ konvergiert.*

Dann konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f, und die Folge (f_n') konvergiert gleichmäßig gegen f'.

Unter den getroffenen Annahmen dürfen Funktionenfolgen also gliedweise differenziert werden, und es gilt (im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz)

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = (\lim_{n\to\infty} f_n)' \, .$$

Sehen wir uns zunächst ein Beispiel an, welches zeigt, dass die gleichmäßige Konvergenz der (f_n) diese Vertauschbarkeit von Grenzübergängen nicht garantiert.

Beispiel Die Folge der Funktionen $f_n(x) := \frac{1}{n} \sin nx$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(x) := 0$. (Warum?) Die Folge der Ableitungen $f_n'(x) =$

$\cos nx$ konvergiert z.B. für $x = 0$ gegen 1. Es ist aber

$$1 = \lim f_n'(0) \neq (\lim f_n)'(0) = f'(0) = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Beweis von Satz 9.13 Wir zeigen, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen n_0 so, dass

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } m, n \geq n_0 \tag{9.4}$$

und

$$||f_m' - f_n'||_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle } m, n \geq n_0\,. \tag{9.5}$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewandt auf die Funktion $f_m - f_n$, liefert die für alle $x, y \in [a, b]$ und $m, n \geq n_0$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} |\big(f_m(x) - f_n(x)\big) - \big(f_m(y) - f_n(y)\big)| &= |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|\,|x - y| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,|x - y| \end{aligned} \tag{9.6}$$

mit $\xi \in [x, y]$. Wir ersetzen in (9.6) y durch x_0 und erhalten

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |\big(f_m(x) - f_n(x)\big) - \big(f_m(x_0) - f_n(x_0)\big)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,|x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in [a, b]$ und $m, n \geq n_0$. Also ist (f_n) eine Cauchyfolge und nach Satz 9.6 gleichmäßig konvergent. Sei f ihr Grenzwert. Wir zeigen nun die Differenzierbarkeit von f in jedem Punkt $y \in [a, b]$. Dazu betrachten wir auf $[a, b]$ die Funktionen

$$F_n(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \\ f_n'(y) \end{cases}, \quad F(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{falls } x \neq y \\ \lim_{n\to\infty} f_n'(y) & \text{falls } x = y\,. \end{cases}$$

Im Beweis von Satz 7.2 haben wir gesehen, dass die Funktionen F_n stetig auf $[a, b]$ sind. Weiter ist klar, dass die Funktionen F_n *punktweise* gegen F streben. Wir zeigen, dass diese Konvergenz sogar gleichmäßig ist.

Für $x \neq y$ erhalten wir aus (9.6) nach Division durch $|x - y|$

$$|F_m(x) - F_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall m, n \geq n_0$$

und somit

$$\sup_{x\in[a,b]\setminus\{y\}} |F_m(x) - F_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall m, n \geq n_0\,.$$

(F_n) ist also eine Cauchyfolge in $M([a,b]\setminus\{y\})$ und nach Satz 9.6 gleichmäßig konvergent. Da sie punktweise gegen F konvergiert, folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 : \sup_{x\in[a,b]\setminus\{y\}} |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon\,.$$

Wir wählen n_0 so groß, dass auch noch

$$|F_n(y) - F(y)| = |f_n'(y) - \lim_{k\to\infty} f_k'(y)| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0\,.$$

Damit ist klar, dass die F_n gleichmäßig auf ganz $[a,b]$ gegen F konvergieren. Nach Satz 9.9 ist F auf $[a,b]$ und insbesondere in y stetig. Es existiert also der Grenzwert $\lim_{x\to y} F(x)$, und dieser stimmt mit $F(y)$ überein. Dann ist die Funktion f an der Stelle y differenzierbar, und es gilt

$$f'(y) = \lim_{n\to\infty} f_n'(y)\,. \qquad \blacksquare$$

9.5 Ergänzungen zu Potenzreihen

Wir wenden zunächst das Resultat von Satz 9.13 auf Potenzreihen an. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Die Partialsummen $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sind offenbar differenzierbar für $z \in (-R,R)$, und ihre Ableitung ist

$$s_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}.$$

Die s_n' sind die Partialsummen der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, und aus Folgerung 6.18 wissen wir, dass diese Potenzreihe den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe besitzt. Also ist (Beispiel 4 aus 9.2) die Folge (s_n') auf jeder kompakten Teilmenge von $\{z \in \mathbb{R} : |z| < R\}$ gleichmäßig konvergent. Aus Satz 9.13 folgt nun:

Satz 9.14 *Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist in jedem Punkt $x \in (-R,R)$ differenzierbar, und ihre Ableitung kann gliedweise bestimmt werden:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,.$$

Im 3. Semester übertragen wir dieses Resultat auf Potenzreihen im Komplexen. Eine wiederholte Anwendung von Satz 9.14 zeigt, dass Potenzreihen unendlich oft differenzierbar sind. Damit haben wir auch Satz 7.11 bewiesen.

Wir vermerken noch, dass man wegen Satz 9.12 Potenzreihen gliedweise integrieren darf, d.h. es ist zum Beispiel

$$\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, y^{n+1}$$

für alle y im Konvergenzintervall $(-R, R)$.

Das nächste Resultat besagt, dass die Werte einer Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises eindeutig festgelegt sind, wenn man ihre Werte nur in einer Folge von Punkten z_n mit $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ kennt. Genauer:

Satz 9.15 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Seien*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n \quad \textit{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z - z_0)^n$$

Potenzreihen mit Konvergenzradius $R > 0$. Weiter sei $K := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, und sei $(z_n) \subseteq K \backslash \{z_0\}$ eine Folge mit Grenzwert z_0. Ist $f(z_n) = g(z_n)$ für alle n, so stimmen beide Funktionen bzw. beide Potenzreihen auf K überein, d.h. es ist

$$f(z) = g(z) \;\; \forall z \in K \quad \textit{und} \quad f_n = g_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis Nach Satz 6.19 sind f und g stetig auf K. Also gilt

$$f_0 = f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(z_0) = g_0\,.$$

Wir nehmen dies als Induktionsanfang. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, wir hätten für ein gewisses n bereits gezeigt, dass

$$f_0 = g_0,\; f_1 = g_1, \ldots,\; f_n = g_n$$

und wollen zeigen, dass dann auch $f_{n+1} = g_{n+1}$. Dazu genügt es, die oben gemachten Überlegungen auf die Potenzreihen

$$\tilde{f}(z) := \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k (z - z_0)^k}{(z - z_0)^{n+1}} = f_{n+1} + f_{n+2}(z - z_0) + f_{n+3}(z - z_0)^2 + \ldots$$

und

$$\tilde{g}(z) = \frac{g(z) - \sum_{k=0}^{n} g_k (z - z_0)^k}{(z - z_0)^{n+1}} = g_{n+1} + g_{n+2}(z - z_0) + g_{n+3}(z - z_0)^2 + \ldots$$

anzuwenden. (Diese sind durch die Brüche nur für $z \neq z_0$, durch die rechten Seiten aber auch für $z = z_0$ definiert.) ∎

Der Identitätssatz ist Grundlage des *Koeffizientenvergleichs*: Hat man ein und dieselbe Funktion in zwei Potenzreihen $\sum a_n (z - z_0)^n$ und $\sum b_n (z - z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius entwickelt, so folgt $a_n = b_n$ für alle n. Ist beispielsweise

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine gerade Funktion, d.h. $f(z) = f(-z)$ für alle z, so folgt aus

$$f(z) = f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^n ,$$

dass $a_n = (-1)^n a_n$ für alle n bzw. $a_n = 0$ für alle ungeraden n ist.

Das dritte Resultat dieses Abschnittes betrifft die Division von Potenzreihen.

Satz 9.16 *Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiere für $|z-z_0| < R$, und es sei $a_0 \neq 0$. Dann lässt sich $1/f$ in einer gewissen Umgebung von z_0 wieder in eine konvergente Potenzreihe entwickeln.*

Sehen wir uns die Potenzreihenentwicklung von $1/f$ zunächst formal und für $z_0 = 0$ an. Aus $f \cdot f^{-1} = 1$ bzw. $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = 1$ folgt nach Cauchy-Multiplikation

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) z^n = 1 = 1 + 0z^1 + 0z^2 + \ldots .$$

Durch Koeffizientenvergleich folgen hieraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 && \text{(bei } z^0) \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 &= 0 && \text{(bei } z^1) \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 &= 0 && \text{(bei } z^2) \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Wegen $a_0 \neq 0$ kann man aus der ersten Gleichung b_0 ermitteln, dann aus der zweiten b_1, aus der dritten b_2 usw. Hierdurch wird eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ eindeutig festgelegt, und Satz 9.16 sagt aus, dass diese Reihe einen positiven Konvergenzradius besitzt.

Beispiel 1 Nach Satz 9.16 läßt sich die Tangensfunktion in einer Umgebung des Punktes 0 in eine Potenzreihe entwickeln. Wir bestimmen die ersten Koeffizienten der Potenzreihe $\tan x := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit der Methode des Koeffizientenvergleichs aus $\tan x := \sin x / \cos x$ und den bekannten Potenzreihen für die Sinus- und Kosinusfunktion. Koeffizientenvergleich in

$$\begin{aligned} x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \ldots \quad &= \quad (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots) \cdot \\ &\qquad \cdot (1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \ldots) \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} \text{bei } x^0 : \quad & 0 &= \; & a_0 \\ \text{bei } x^1 : \quad & 1 &= \; & a_1 \\ \text{bei } x^2 : \quad & 0 &= \; & a_2 - \tfrac{a_0}{2} \\ \text{bei } x^3 : \quad & -\tfrac{1}{6} &= \; & a_3 - \tfrac{1}{2}a_1 \\ \text{bei } x^4 : \quad & 0 &= \; & a_4 - \tfrac{1}{2}a_2 + \tfrac{1}{24}a_0 \end{aligned}$$

und hieraus der Reihe nach $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$ und $a_4 = 0$. Weitere Rechnungen liefern

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

Es gibt keine „einfache“ Formel für die Koeffizienten dieser Reihe. ■

Beispiel 2 Wir suchen eine explizite Formel für die Glieder der *Fibonacci-Folge*

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2\,. \tag{9.7}$$

Wir ordnen dieser Folge die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zu und finden mit (9.7)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + a_{n-1}) x^n \\ &= 1 + x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 1 + x + x^2 f(x) + x\big(f(x) - 1\big)\,. \end{aligned}$$

Umstellen nach $f(x)$ liefert $f(x) = (1 - x - x^2)^{-1}$. Da die Potenzreihe $1 - x - x^2$ (die ein Polynom ist) überall konvergiert und an der Stelle 0 ungleich 0 ist, folgt mit Satz 9.16, dass auch die Reihe

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

einen positiven Konvergenzradius besitzt. Wir bestimmen die a_n, indem wir $f(x) = (1 - x - x^2)^{-1}$ geschickt in eine Potenzreihe entwickeln. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{(Partialbruchentwicklung)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})} \frac{1}{1 - \frac{2x}{-1+\sqrt{5}}} - \frac{2}{\sqrt{5}(-1-\sqrt{5})} \frac{1}{1 - \frac{2x}{-1-\sqrt{5}}}\,. \end{aligned}$$

Ist $|x|$ hinreichend klein, so ist dies gleich (geometrische Reihe!)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{2x}{-1+\sqrt{5}}\Big)^n - \frac{2}{\sqrt{5}(-1-\sqrt{5})} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{2x}{-1-\sqrt{5}}\Big)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \bigg(\Big(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\Big)^{n+1}\bigg) x^n\,, \end{aligned}$$

woraus nach Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} - \left(\tfrac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$ ■

Wir werden Satz 9.16 im 3. Semester beweisen. Für Interessenten folgt ein Beweis, der nur reelle Methoden benutzt. Dafür benötigen wir einige Vorbereitungen. Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt auch *Doppelfolge*. Wie bei gewöhnlichen Folgen identifiziert man f häufig mit ihren Werten $f(m,n) =: a_{mn}$ und schreibt $(a_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ für die Doppelfolge. Konvergenz der Doppelfolge $(a_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ gegen $a \in \mathbb{C}$ bedeutet nach Definition

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad |a_{mn} - a| < \varepsilon. \tag{9.8}$$

Beispiel 3 Für jede Folge (a_n) wird durch $a_{mn} := a_m - a_n$ eine Doppelfolge festgelegt. Die Folge (a_n) ist genau dann Cauchyfolge, wenn die Doppelfolge (a_{mn}) gegen 0 konvergiert. ■

Beispiel 4 Die Doppelfolge (a_{mn}) mit $a_{mn} = (-1)^{m+n}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0. Für $n_0 \geq 2/\varepsilon$ und $m, n \geq n_0$ ist nämlich

$$|a_{mn} - 0| = \left|\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right| \leq \frac{2}{n_0} \leq \varepsilon.$$ ■

Für den Grenzwert a einer konvergenten Doppelfolge (a_{mn}) schreibt man $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = a$. Wenn für jedes m die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ bzw. für jedes n die Grenzwerte $\lim_{m\to\infty} a_{mn}$ existieren, kann man auch die *iterierten* Grenzwerte $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{mn})$ bzw. $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{mn})$ betrachten.

Man beachte, dass im Beispiel 4 zwar der Grenzwert $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn}$ existiert, nicht aber die Grenzwerte $\lim_{m\to\infty} a_{mn}$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_{mn}$.

Satz 9.17 *Die Doppelfolge (a_{mn}) sei konvergent, und für jedes m bzw. n sollen die Grenzwerte* $\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ *und* $\lim_{m\to\infty} a_{mn}$ *existieren. Dann existieren auch die interierten Grenzwerte, und es gilt:*

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{mn}) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{mn}) = \lim_{m,n\to\infty} a_{mn}.$$

Beweis Sei $a := \lim_{m,n\to\infty} a_{m,n}$, und für jedes m existiere der Grenzwert $\alpha_m := \lim_{n\to\infty} a_{mn}$. Konvergenz der Doppelfolge (a_{mn}) bedeutet gerade (9.8). Lassen wir in (9.8) $n \to \infty$ streben, folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq n_0 \quad |\alpha_m - a| < \varepsilon.$$

Dies heißt aber nichts anderes als dass $\lim_{m\to\infty} \alpha_n = a$. Die zweite Aussage folgt analog. ■

Jede Doppelfolge (a_{mn}) erzeugt eine Doppelfolge (s_{mn}) durch

$$s_{mn} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{jk}.$$

Wenn die Doppelfolge (s_{mn}) gegen s konvergiert, so heißt die *Doppelreihe* $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$ konvergent, und man schreibt $s = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$. Durch Übertragung von Satz 9.17 erhält man sofort das folgende Resultat.

Satz 9.18 *Die Doppelreihe $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$ sei konvergent, und für jedes j bzw. k sollen die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ bzw. $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$ konvergieren. Dann konvergieren auch die iterierten Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$, und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}. \tag{9.9}$$

Hieraus folgt leicht der wichtige *Doppelreihensatz von Cauchy*.

Satz 9.19 *Ist eine der iterierten Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$ absolut konvergent (d.h. konvergiert sie auch noch, wenn a_{jk} durch $|a_{jk}|$ ersetzt wird), dann sind auch die andere iterierte Reihe sowie die Doppelreihe $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$ absolut konvergent, und es gilt* (9.9).

Beweis Sei z.B. $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|$ konvergent mit der Summe a. Dann ist jede Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ absolut konvergent, und wegen $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_{jk}| \leq a$ konvergiert auch die Doppelreihe absolut. Gleiches gilt wegen $\sum_{j=0}^{m} |a_{jk}| \leq a$ für jede Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}|$. Aus Satz 9.18 folgt nun die Behauptung. ■

Beweis von Satz 9.16 Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $a_0 = 1$. Nach Satz 6.19 gibt es ein $\delta \in (0, R)$, so dass $|a_1 z + a_2 z^2 + \ldots| < 1$ für alle $|z| < \delta$. Für diese z ist (geometrische Reihe!)

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1 - (-a_1 z - a_2 z^2 - \ldots)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-a_1 z - a_2 z^2 - \ldots)^j.$$

Cauchymultiplikation ergibt

$$(-a_1 z - a_2 z^2 - \ldots)^j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^k \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \ldots$$

mit gewissen Koeffizienten a_{jk}. Es ist also

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^k.$$

Dürften wir hier die Summationsreihenfolge vertauschen, wäre dies die Behauptung. Wenn die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|\,|z|^k$ konvergiert, ist nach Satz 9.19 das Vertauschen möglich. Wir zeigen, dass dies für hinreichend kleine $|z|$ tatsächlich gilt.

Da jede Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert, gibt es ein $\rho \in (0, \delta)$ so, dass

$$|a_1|\,|z| + |a_2|\,|z|^2 + \ldots < 1 \quad \text{für alle } z \ \text{ mit } \ |z| < \rho.$$

Für diese z konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} (|a_1|\,|z| + |a_2|\,|z|^2 + \ldots)^j$, und diese lässt sich nach Cauchymultiplikation in der Form $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{jk}|z|^k$ schreiben. Offenbar gilt dabei $|a_{jk}| \le \alpha_{jk}$. Folglich konvergiert die iterierte Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|\,|z|^k$ für alle z mit $|z| < \rho$. Hieraus und aus dem Doppelreihensatz folgt die Behauptung. ■

9.6 Fourierreihen

Nach den Potenzreihen betrachten wir eine weitere Klasse von Funktionenreihen, die von großer Bedeutung in der Analysis sowie für ihre Anwendungen in Physik und Technik ist: die Fourierreihen. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzintervalls beliebig oft differenzierbar sind. Es können also nur "wenige" Funktionen durch ihre Potenzreihe dargestellt werden: die reell–analytischen. Demgegenüber lassen sich durch Fourierreihen z.B. auch periodische Funktionen darstellen, die nur stückweise differenzierbar sind und deren Ableitungen Sprünge haben. Aus Zeitgründen können wir uns nur einen elementaren Überblick über die Fourierreihen verschaffen, obwohl dies der Bedeutung dieser Reihen nicht angemessen ist. Auf weitere Aspekte wird z.B. in der Funktionalanalysis eingegangen.

9.6.1 Periodische Funktionen

Eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt *periodisch mit der Periode L*, wenn

$$f(x + L) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Durch eine Variablensubstitution kann man Funktionen mit der Periode L auf solche mit der Periode 2π zurückführen. Hat f die Periode L, so hat $F(x) := f\big(\frac{L}{2\pi}\,x\big)$ die Periode 2π:

$$F(x + 2\pi) = f\Big(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\Big) = f\Big(\frac{L}{2\pi}\,x + L\Big) = f\Big(\frac{L}{2\pi}\,x\Big) = F(x)\,.$$

Wir betrachten daher von nun an nur Funktionen der Periode 2π. Beispielsweise sind die Funktionen $x \mapsto \sin kx$ und $x \mapsto \cos kx$ 2π–periodisch, und für die Dirichletfunktion ist *jede* rationale Zahl eine Periode.

9.6.2 Trigonometrische Reihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *trigonometrische Reihe*, wenn es Konstanten $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 0)$ und $b_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ so gibt, dass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,. \tag{9.10}$$

Trigonometrische Reihen sind offenbar 2π–periodisch.

Satz 9.20 *Wenn die Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut konvergieren, so konvergiert die Reihe* (9.10) *auf* $\mathbb{R}$ *absolut bezüglich der Supremumsnorm und gleichmäßig.*

Beweis Die absolute Konvergenz der Reihe (9.10) folgt aus

$$||a_n \cos nx + b_n \sin nx||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|\,.$$

Nach Satz 9.8 folgt aus der absoluten die gleichmäßige Konvergenz. ■

Im Weiteren benötigen wir die für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gültigen Identitäten

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos mx \, \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{für } m = n = 0, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \sin mx \, \sin nx \, dx &= \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n > 0, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \sin mx \, \cos nx \, dx &= 0\,.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Diese kann man leicht mit Hilfe von Additionstheoremen wie

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$$

zeigen (↗ Übung). Mit den Identitäten (9.11) erhält man einen Zusammenhang zwischen den Werten einer trigonometrischen Reihe f und ihren Koeffizienten a_n, b_n.

Satz 9.21 (Euler/Fourier) *Die Reihe* (9.10) *sei auf* $\mathbb{R}$ *gleichmäßig konvergent. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \, \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \, \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Beweis Wir multiplizieren beide Seiten von (9.10) mit $\cos nx$

$$f(x)\,\cos nx = \frac{a_0}{2}\,\cos nx + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\,\cos mx\,\cos nx + b_m\,\sin mx\,\cos nx)$$

und integrieren über $[0, 2\pi]$. Da die Reihe (9.10) gleichmäßig konvergiert, konvergiert auch die Reihe $f(x)\cos nx$ gleichmäßig; Integration und Summation dürfen vertauscht werden. Mit (9.11) erhält man sofort die erste Behauptung in (9.12). Die zweite bekommt man analog durch Multiplikation von f mit $\sin nx$. ∎

9.6.3 Fourierreihen

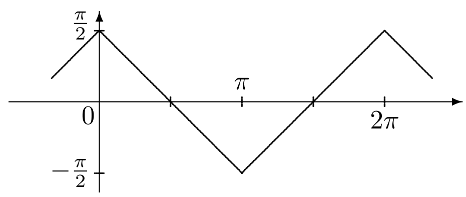
Die Formeln (9.12) erlauben die Bestimmung von Zahlen a_n, b_n auch dann, wenn f nicht als gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe vorausgesetzt wird, sondern nur als Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$ (es genügt sogar, dass $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ als uneigentliches Integral absolut konvergiert.) Ist f eine solche Funktion, so bestimmen wir gemäß (9.12) Zahlen a_n, b_n, die dann die *Fourierkoeffizienten* von f heißen, und ordnen f die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{9.13}$$

zu, die sogenannte *Fourierreihe* von f.

Beispiel 1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die "Sägezahnfunktion", die auf $[0, 2\pi)$ durch

$$f(x) = \begin{cases} -x + \dfrac{\pi}{2} & \text{für } x \in [0, \pi) \\ x - \dfrac{3}{2}\pi & \text{für } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$



definiert und 2π–periodisch ist.

Da f eine gerade Funktion ist (d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle x), ist $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Für die a_n erhält man

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(-x + \frac{\pi}{2}\Big)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\Big(x - \frac{3}{2}\pi\Big)\cos nx\,dx.$$

Für $n = 0$ erhält man sofort $a_0 = 0$. Für $n \geq 1$ folgt mit partieller Integration

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\big(1 - (-1)^n\big) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{n^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die durch f definierte Fourierreihe ist also

$$\frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\Big)\,.$$

Da die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergiert, konvergiert diese Fourierreihe gleichmäßig (Satz 9.20). Es ist aber im Moment nicht klar, ob die Summe dieser trigonometrischen Reihe etwas mit den Werten von f zu tun hat.

Der folgende Satz 9.22 wird aber zeigen, dass tatsächlich

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) \tag{9.14}$$

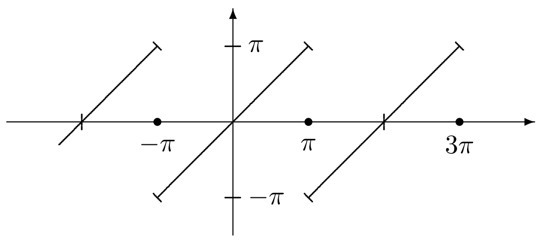
für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Hieraus folgt z.B. die bemerkenswerte Identität

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

indem man in (9.14) $x = 0$ setzt. ■

Beispiel 2 Die 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei erklärt durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{für } x = \pi\,. \end{cases}$$



Sie ist unstetig in allen Punkten $x = (2k+1)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da f ungerade ist, sind alle $a_n = 0$. Für die b_n erhalten wir

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(wegen der 2π–Periodizität von f ist es egal, über welches Integral der Länge 2π man integriert). Die Fourierreihe von f lautet also

$$2\big(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\big)\,.$$

Es ist weder unmittelbar klar, ob diese Reihe für $x \neq 0$ überhaupt konvergiert, noch ob ihre Grenzfunktion mit f übereinstimmt. ■

9.6.4 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen

Die zentrale Frage ist also: konvergiert die Fourierreihe einer 2π–periodischen Funktion f in irgendeinem Sinn (punktweise, gleichmäßig, ...), und wenn ja, stimmt ihre Grenzfunktion dann mit f überein?

Einfache Überlegungen zeigen, dass in der Regel nicht einmal punktweise Konvergenz vorliegen kann: zwei Funktionen f und g, die sich nur in endlich vielen

Punkten voneinander unterscheiden, besitzen die gleiche Fourierreihe. Selbst für *stetige* Funktionen kann man nicht garantieren, dass ihre Fourierreihe gegen die Ausgangsfunktion punktweise konvergiert. Jedoch gilt:

Satz 9.22 *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sei* 2π*–periodisch und Riemann-integrierbar auf* $[0, 2\pi]$*, und die folgenden einseitigen Grenzwerte sollen an der Stelle* $x \in \mathbb{R}$ *existieren:*

$$f(x+0) = \lim_{h \searrow 0} f(x+h) \quad , \qquad f(x-0) := \lim_{h \nearrow 0} f(x+h)\,,$$

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \quad , \qquad \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-0)}{h}\,.$$

Dann konvergiert die Fourierreihe von f *an der Stelle* x *gegen* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

f soll also in x einseitige Grenzwerte und "einseitige Ableitungen" besitzen. Dann konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte. In den Beispielen 1 und 2 sind diese Bedingungen in jedem Punkt erfüllt. Man hat also jeweils punktweise Konvergenz der Fourierreihe gegen f auf ganz $\mathbb{R}$. Einen Beweis dieses Satzes finden Sie in Heuser, Analysis II, Satz 136.4. ∎

Ohne die Differenzierbarkeitsannahme gilt dieser Satz nicht mehr. Man kann aber ohne solche Annahmen auskommen, wenn man dafür den Begriff der Konvergenz selbst abschwächt.

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die Summe s besitzt, wenn also ihre Partialsummen $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ gegen s konvergieren, so konvergieren auch die arithmetischen Mittel $\sigma_n := \frac{1}{n}(s_1 + \ldots + s_n)$ gegen s (Cauchyscher Grenzwertsatz, vgl. Heuser, Analysis I, Satz 27.1). Es kann aber sein, dass die Folge (σ_n) auch dann noch gegen eine Zahl s konvergiert, wenn die Folge (s_n) nicht konvergiert (Beispiel: $a_n = (-1)^n$). Man sagt dann, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ im *Sinne von Cesaro konvergiert* und dass ihre Summe gleich s ist.

Von Fejer wurde dieses Konzept auf Fourierreihen angewandt. Sei dazu

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

die n-te Partialsumme der Fourierreihe und

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n+1}\big(s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)\big)\,.$$

Satz 9.23 (Fejer) *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*–periodisch und Riemann-integrierbar auf* $[0, 2\pi]$*. Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *sollen die einseitigen Grenzwerte* $f(x+0)$ *und* $f(x-0)$ *existieren, und es sei* $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big)$*. Dann ist* $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$*, d.h. die Fourierreihe von* f *konvergiert im Sinne von Cesaro punktweise gegen* f*. Ist* f *stetig, so konvergieren die* σ_n *sogar gleichmäßig gegen* f*.*

Ein Beweis steht in Heuser, Analysis II, Sätze 139.3 und 139.5. ■

Eine Anwendung findet die zweite Aussage dieses Satzes beim Beweis des wichtigen *Weierstraßschen Approximationssatzes.*

Satz 9.24 (Weierstraß) *Sei f stetig auf $[a,b]$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Polynom p mit*

$$||p - f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |p(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Stetige Funktionen können bezüglich der Supremumsnorm also beliebig genau durch Polynome approximiert werden. Einen Beweis finden Sie in Heuser, Analysis II, Abschnitt 139, Aufgabe 3. ■

9.6.5 Konvergenz im quadratischen Mittel

Wir haben gesehen, dass die Untersuchung der punktweisen oder gar gleichmäßigen Konvergenz einer Fourierreihe erheblich Schwierigkeiten bereitet. Ein zu Fourierreihen "passender" Konvergenzbegriff ist die Konvergenz im quadratischen Mittel.

Seien f, g Riemann-integrierbare Funktionen auf $[0, 2\pi]$. Für andere Intervalle definiert man die folgenden Begriffe analog. Das *Skalarprodukt* von f und g ist die Zahl

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt\,,$$

und die *L^2–Norm* von f wird erklärt durch

$$||f||_2 := \langle f, f\rangle^{1/2} = \Big(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt\Big)^{1/2}.$$

Dann gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g\rangle| \le ||f||_2\, ||g||_2\,. \tag{9.15}$$

Man beachte die Analogie zum Skalarprodukt bzw. zur Euklidischen Norm von Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (9.15) wird genauso bewiesen wie in diesem Fall. Mit (9.15) erhält man leicht die Dreiecksungleichung

$$||f + g||_2 \le ||f||_2 + ||g||_2.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} ||f + g||_2^2 &= \langle f + g,\ f + g\rangle = \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \\ &\le ||f||_2^2 + 2||f||_2\, ||g||_2 + ||g||_2^2 = \big(||f||_2 + ||g||_2\big)^2\,. \end{aligned}$$

Dennoch ist $||\cdot||_2$ keine Norm auf $R([0, 2\pi])$! (Warum nicht?) Mögliche Auswege sind:

(A) Wir betrachten nur stetige Funktionen. Auf $C([0,2\pi])$ ist $||\cdot||_2$ eine Norm.

(B) Man identifiziert zwei Funktionen, wenn $||f-g||_2 = 0$.

Wir werden hier beides nicht tun: (A) engt uns zu sehr ein, und (B) schauen wir uns im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie im 4. Semester an.

Definition 9.25 *Seien $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π–periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0,2\pi]$. Die Folge (f_n)* konvergiert im quadratischen Mittel *gegen f, wenn*

$$\lim_{n\to 0} ||f-f_n||_2 = 0 \quad bzw. \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \big(f(x)-f_n(x)\big)^2 dx = 0\,.$$

Noch einmal: die Tatsache, dass $||\cdot||_2$ keine Norm auf $R([0,2\pi])$ ist, bringt einige Komplikationen mit sich (z.B. kann (f_n) gegen zwei verschiedene Funktionen f und g im quadratischen Mittel konvergieren), die wir erst im vierten Semester beheben.

Zwei Funktionen $f, g \in R([0,2\pi])$ heißen *orthogonal*, wenn $\langle f, g\rangle = 0$.
Eine Folge (u_n) von Funktionen heißt ein *Orthogonalsystem*, wenn $\langle u_m, u_n\rangle = 0$ für alle $m \neq n$ und ein *Orthonormalsystem*, wenn zusätzlich $\langle u_n, u_n\rangle = 1$ für alle n ist. Aus den Identitäten (9.11) wissen wir, dass die Funktionen

$$u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad u_{2n}(x) := \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\,, \quad u_{2n-1}(x) := \frac{\sin n\pi}{\sqrt{\pi}} \quad (n \geq 1) \tag{9.16}$$

ein Orthonormalsystem über dem Intervall $[0,2\pi]$ bilden.

Ist f Riemann-integrierbar und $(u_n)_{n\geq 0}$ ein Orthonormalsystem auf $[0,2\pi]$, so heißen die Zahlen $c_n := \langle f, u_n\rangle$ die *Fourierkoeffizienten* von f und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ die *Fourierreihe* von f. Man überlegt sich leicht, dass für das spezielle Orthonormalsystem (9.16) diese Begriffe mit den früher definierten übereinstimmen.

Wann konvergiert nun die Fourierreihe einer Funktion im quadratischen Mittel gegen diese Funktion? Zunächst eine Vorüberlegung.

Satz 9.26 (Besselsche Ungleichung) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π–periodisch und Riemann–integrierbar auf $[0,2\pi]$, und sei $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem auf $[0,2\pi]$. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten $c_n = \langle f, u_n\rangle$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = ||f||_2^2\,.$$

Beweis Wir überlegen uns zunächst für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\|f - \sum_{n=0}^{k} c_n u_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=0}^{k} |c_n|^2. \tag{9.17}$$

Sei $g = \sum_{n=0}^{k} c_n u_n$. Dann ist

$$\|f - \sum_{n=0}^{k} c_n u_n\|_2^2 = \|f - g\|_2^2 = \langle f - g, f - g\rangle = \|f\|_2^2 - 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle.$$

Für die Skalarprodukte finden wir

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \langle f, \sum_{n=0}^{k} c_n u_n\rangle = \sum_{n=0}^{k} c_n \langle f, u_n\rangle = \sum_{n=0}^{k} |c_n|^2, \\
\langle g, g\rangle &= \langle \sum_{n=0}^{k} c_n u_n, \sum_{m=0}^{k} c_m u_m\rangle = \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} c_n c_m \langle u_n, u_m\rangle = \sum_{n=0}^{k} |c_n|^2,
\end{aligned}$$

womit (9.17) sofort folgt. Da $\|f - g\|_2^2 \geq 0$, folgt aus (9.17) die Behauptung. ∎

Folgerung 9.27 *Die Fourierreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ *von* f *konvergiert genau dann im quadratischen Mittel gegen* f*, wenn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|_2^2. \tag{9.18}$$

Dies folgt sofort aus (9.17). Die Beziehung (9.18) heißt *Parsevalsche Gleichung*.

Satz 9.28 *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*–periodisch und Riemann-integrierbar auf* $[0, 2\pi]$*, und sei* (u_n) *das spezielle Orthonormalsystem* (9.16). *Dann konvergiert die Fourierreihe von* f *im quadratischen Mittel gegen* f.

Die Konvergenz der Fourierreihe gegen f im quadratischen Mittel gilt also ohne einschränkende Voraussetzungen an f und ist deshalb eine "sehr natürliche" Konvergenzart für Fourierreihen. Dafür ist sie schwächer als die gleichmäßige Konvergenz.

Beweis *1. Schritt* Sei $0 \leq a < 2\pi$. Wir zeigen die Aussage für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in [0, a] \\ 0 & \text{wenn } x \in (a, 2\pi]. \end{cases}$$

Offenbar ist $\|f\|_2^2 = \int_0^a dx = a$, und für die Fourierkoeffizienten gilt

$$\begin{aligned}
c_0 &= \langle f, u_0\rangle = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}, \\
c_{2n} &= \langle f, u_{2n}\rangle = \langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n\sqrt{\pi}}\Big|_0^a = \frac{\sin na}{n\sqrt{\pi}}, \\
c_{2n-1} &= \langle f, u_{2n-1}\rangle = \langle f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \sin nx \, dx = \frac{-\cos nx}{n\sqrt{\pi}}\Big|_0^a = \frac{1 - \cos na}{n\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Also ist (die absolute Konvergenz der betrachteten Reihen folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, vgl. Kapitel 5)

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 &= \frac{a^2}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos na)^2}{n^2\pi} \\
&= \frac{a^2}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\sin^2 na}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{2\cos na}{n^2} + \frac{\cos^2 na}{n^2}\Big) \\
&= \frac{a^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n^2} - \frac{\cos na}{n^2}\Big).
\end{aligned}
$$

Mit der Identität

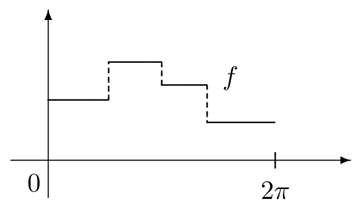
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{(\pi - x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

(Nachrechnen!) erhalten wir weiter

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 &= \frac{a^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{\pi}\Big(\frac{(\pi-a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\Big) \\
&= \frac{a^2}{2\pi} + \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\Big) = a.
\end{aligned}
$$

Für diese spezielle Funktion gilt also die Parsevalsche Gleichung (9.18), und aus Folgerung 9.27 folgt die Behauptung.

2. Schritt Wir zeigen die Behauptung für stückweise konstante Funktionen f ("Treppenfunktionen"). Für jede derartige Funktion gibt es Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ von der im 1. Schritt beschriebenen Gestalt sowie Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ so, dass $f(x) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j f_j(x)$ für alle $x \in]0, 2\pi]$ mit Ausnahme endlich vieler.



Seien s_n bzw. s_{nj} die n. Partialsummen der Fourierreihen der Funktionen f bzw. f_j. Dann ist offenbar $s_n = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j s_{nj}$ und folglich

$$\|f - s_n\|_2 = \|\sum_{j=1}^{r} \alpha_j (f_j - s_{nj})\|_2 \le \sum_{j=1}^{r} |\alpha_j| \, \|f_j - s_{nj}\|_2.$$

Nach Schritt 1 folgt $\|f - s_n\|_2 \to 0$.

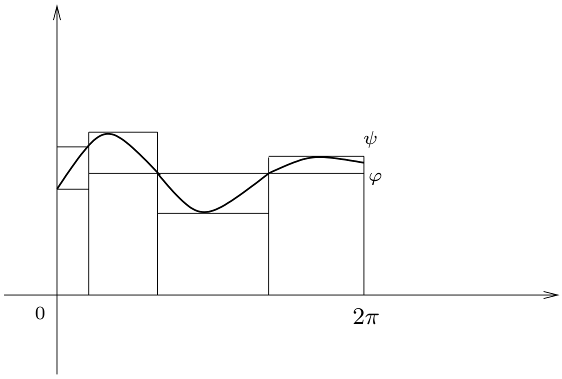
3. Schritt Wir zeigen die Behauptung für eine beliebige Riemann-integrierbare

Funktion f mit $\|f\|_\infty \leq 1$ (offenbar genügt es, solche Funktionen zu betrachten). Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ 2π–periodische Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) φ, ψ sind Treppenfunktionen.

(b) $-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$.

(c) $\int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$.



Sei $g := f - \varphi$, und seien $s_{n,f}, s_{n,g}$ bzw. $s_{n,\varphi}$ die n–ten Partialsummen der Fourierreihen von f, g bzw. φ. Dann ist $s_{n,f} = s_{n,g} + s_{n,\varphi}$ und folglich

$$\|f - s_{n,f}\|_2 \leq \|\varphi - s_{n,\varphi}\|_2 + \|g - s_{n,g}\|_2. \tag{9.19}$$

Nach Schritt 2 gibt es ein N so, dass $\|\varphi - s_{n,\varphi}\|_2 < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Weiter ist nach (9.17)

$$\begin{aligned} \|g - s_{n,g}\|_2^2 &\leq \|g\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} |\psi(x) - \varphi(x)|^2 dx \leq 2 \int_0^{2\pi} \Big(\psi(x) - \varphi(x)\Big) dx \overset{\text{(c)}}{\leq} \frac{\varepsilon^2}{4}. \end{aligned}$$

(Beachte: wegen $|\psi - \varphi| \leq 2$ ist $|\psi - \varphi|^2 \leq 2(\psi - \varphi)$.) Mit (9.19) folgt schließlich

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|f - s_{n,f}\|_2 < \varepsilon,$$

d.h. die Partialsummen $s_{n,f}$ konvergieren in der L^2-Norm gegen f. ■