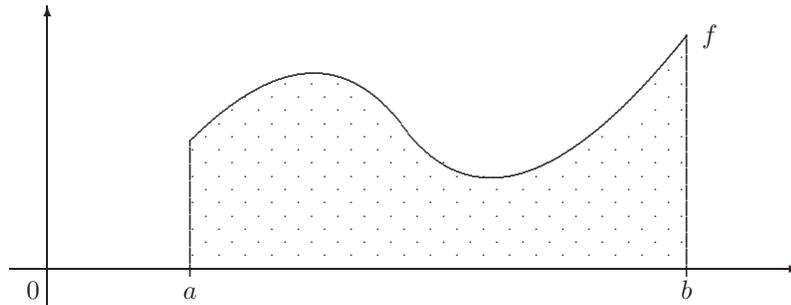


## 8 Das Riemann–Integral

Es sind wenigstens zwei Probleme, die zur Herausbildung der Integralrechnung geführt haben.

*Flächenberechnungen* Gegeben ist eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht ist der Inhalt der von den Geraden  $x = a, x = b, y = 0$  und vom Graphen der Funktion  $f$  begrenzten Fläche.

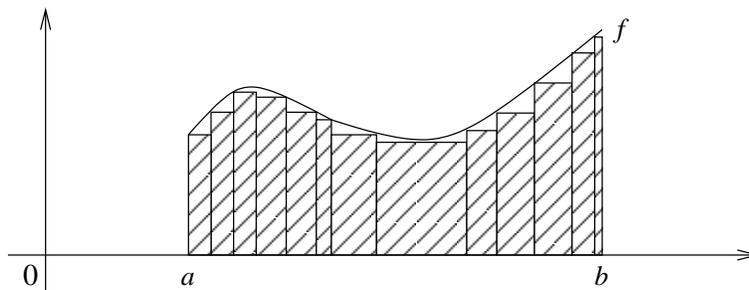


*Umkehrung des Differenzierens* Kann man aus der Ableitung einer Funktion die Funktion selbst rekonstruieren? Gibt es für jede Funktion  $f$  eine Funktion  $g$  mit  $g' = f$ ? Wenn ja, wie viele?

Zur Lösung dieser und anderer Fragen wurden verschiedene Integralbegriffe entwickelt, von denen wir einen der einfachsten – das Riemann–Integral – kennenlernen wollen. Eine in vieler Hinsicht zufriedenstellendere Integrationstheorie wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Lebesgue geschaffen. Wir kommen im 4. Semester darauf zurück.

### 8.1 Der Begriff des Riemann–Integrals

Eine naheliegende Idee zur Berechnung der Fläche eines komplizierten Gebietes (etwa des oben skizzierten) ist es, das Gebiet durch andere Gebiete, deren Flächenberechnung einfacher ist, “anzunähern”, z.B. durch eine endliche Anzahl von Rechtecken. Wir hoffen, dass wir dem “wahren” Flächeninhalt näherkommen, wenn wir die “Approximation” verbessern, indem wir z.B. die Rechtecke schmaler machen. Diese vage Vorstellung wollen wir nun präzisieren.



Für  $i = 0, \dots, n$  sei  $x_i \in [a, b]$ . Die Menge  $Z := \{x_0, \dots, x_n\}$  heißt eine *Zerlegung* des Intervalls  $[a, b]$ , wenn  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Die Länge des  $i$ . Teilintervalls  $I_i := [x_i, x_{i+1}]$  bezeichnen wir mit  $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$ . Die Zahl  $|Z| := \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$  heißt das *Feinheitsmaß* oder die *Maschenweite* von  $Z$ . Ist  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ , und geht eine weitere Zerlegung  $Z'$  von  $[a, b]$  aus  $Z$  durch Hinzufügen weiterer Punkte hervor, so heißt  $Z'$  *Verfeinerung* von  $Z$ . Dann ist offenbar  $|Z'| \leq |Z|$ .

Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $\xi := (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$  ein zugehöriger *Zwischenvektor*, d.h. es gelte  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$  für jedes  $i$ . Dann heißt

$$S(Z, \xi, f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

eine *Riemann-Summe* für  $f$ . Sei schließlich  $(Z_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , und für jedes  $n$  sei  $\xi^{(n)}$  ein Zwischenvektor für  $Z_n$ . Dann heißt die Folge  $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n=1}^\infty$  der entsprechenden Riemann-Summen eine *Riemann-Folge* für  $f$ .

**Definition 8.1** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Riemann-integrierbar*, wenn jede Riemann-Folge  $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n=1}^\infty$  (im eigentlichen Sinn) konvergiert.

**Lemma 8.2** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, so haben alle Riemann-Folgen für  $f$  den gleichen Grenzwert.

**Beweis** Sind  $(S_n^{(1)})$  und  $(S_n^{(2)})$  Riemann-Folgen für  $f$ , so ist auch  $(S_n) := (S_1^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, \dots)$  eine Riemann-Folge für  $f$ . Nach Voraussetzung konvergiert die Folge  $(S_n)$ . Dann konvergieren auch ihre Teilfolgen  $(S_n^{(1)})$  und  $(S_n^{(2)})$  gegen den gleichen Grenzwert. ■

**Definition 8.3** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und  $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n=1}^\infty$  eine Riemann-Folge  $f$ . Dann heißt der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(Z_n, \xi^{(n)}, f)$  das *Riemann-Integral* von  $f$ , und wir bezeichnen diesen Grenzwert mit  $\int_a^b f(x) dx$ .

Beachten Sie, dass  $\int_a^b f(x) dx$  nach Lemma 8.2 nicht von der Wahl der Riemann-Folge abhängt.

**Satz 8.4** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, so ist  $f$  beschränkt.

**Beweis** Angenommen,  $f$  ist auf  $[a, b]$  unbeschränkt, etwa  $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = +\infty$ . Dann gibt es eine Folge  $(x_i)$  von Punkten aus  $[a, b]$  mit  $f(x_i) \rightarrow +\infty$ . Aus der Folge  $(x_i)$  lässt sich eine konvergente Teilfolge auswählen (Bolzano/Weierstraß). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Folge  $(x_i)$  bereits selbst konvergiert. Ihr Grenzwert sei  $\hat{x}$ .

Ist  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ , so gibt es sicher ein Teilintervall  $I_m$  von  $Z$ , welches

den Punkt  $\hat{x}$  und noch unendlich viele der Punkte  $x_i$  enthält. Der Einfachheit halber nehmen wir wieder an, dass alle  $x_i$  in  $I_m$  liegen.

Für alle Teilintervalle  $I_k \neq I_m$  von  $Z$  wählen wir irgendwelche Zwischenpunkte  $\xi_k$  und setzen

$$S' := \sum_{k \neq m} f(\xi_k) |I_k|.$$

Ist nun eine beliebig große Zahl  $G$  vorgegeben, so können wir wegen  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = +\infty$  als Zwischenpunkt  $\xi_m \in I_m$  einen der Punkte  $x_i$  so wählen, dass

$$f(\xi_m) > (G - S')/|I_m| \quad \text{bzw.} \quad S(Z, \xi, f) = S' + f(\xi_m)|I_m| > G.$$

Es lässt sich also eine Riemann-Folge  $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n=1}^{\infty}$  konstruieren, welche bestimmt gegen  $+\infty$  divergiert. Dann kann  $f$  nicht Riemann-integrierbar sein. ■

## 8.2 Darboux'sche Integrale

Wir betrachten einen weiteren Zugang zum Riemann-Integral. Für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  und jede *beschränkte* Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in I_i} f(x),$$

und wir nennen

$$U(Z, f) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \quad \text{bzw.} \quad O(Z, f) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

die zugehörige *Unter-* bzw. *Obersumme*.

**Lemma 8.5** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

(a) Für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  und jede Verfeinerung  $Z'$  von  $Z$  gilt

$$U(Z, f) \leq U(Z', f), \quad O(Z', f) \leq O(Z, f).$$

(b) Für je zwei Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $Z$  gilt  $U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f)$ .

**Beweis** (a) Wir zeigen nur die erste Behauptung, und diese nur für den Fall, dass  $Z'$  genau einen Punkt  $x^*$  mehr enthält als  $Z$ . Unterscheiden sich  $Z$  und  $Z'$  um  $p > 1$  Punkte, muss diese Überlegung  $p$  mal angewandt werden.

Sei  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  und  $x_j < x^* < x_{j+1}$ . Für

$$m'_j := \inf_{x \in [x_j, x^*]} f(x) \quad \text{und} \quad m''_j := \inf_{x \in [x^*, x_{j+1}]} f(x)$$

ist  $m_j \leq m'_j$  und  $m_j \leq m''_j$ , und wir schätzen ab

$$m_j \Delta x_j = m_j(x^* - x_j) + m_j(x_{j+1} - x^*) \leq m'_j(x^* - x_j) + m''_j(x_{j+1} - x^*).$$

Da beim Übergang von  $U(Z, f)$  zu  $U(Z', f)$  lediglich der Summand  $m_j \Delta x_j$  durch  $m'_j(x^* - x_j) + m''_j(x_{j+1} - x^*)$  ersetzt wird, folgt die Behauptung.

(b) Sei  $Z'$  eine gemeinsame Verfeinerung von  $Z_1$  und  $Z_2$ . Dann ist  $U(Z_1, f) \leq U(Z', f)$  und  $O(Z', f) \leq O(Z_2, f)$ , nach Teil (a), und die Ungleichung  $U(Z', f) \leq O(Z', f)$  gilt offenbar. ■

Aus Lemma 8.5 (b) folgt, dass die Menge der Untersummen einer beschränkten Funktion nach oben und die Menge der Obersummen nach unten beschränkt ist. Damit existieren (als endliche Zahlen)

$$\inf_Z O(Z, f) =: \int_a^{*b} f(x) dx \quad \text{und} \quad \sup_Z U(Z, f) =: \int_{*a}^b f(x) dx.$$

Diese Zahlen heißen *oberes* und *unteres Darbouxches Integral* von  $f$ . Aus Lemma 8.5 (b) folgt sofort

$$\int_{*a}^b f(x) dx \leq \int_a^{*b} f(x) dx.$$

**Satz 8.6** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, und sei  $(Z_n)$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n| = 0$ . Dann existieren die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f)$ , und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f) = \int_a^{*b} f(x) dx.$$

**Beweis** Wir führen den Beweis für Untersummen. Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es eine Zerlegung  $Z'$  von  $[a, b]$  so, dass

$$0 \leq \int_{*a}^b f(x) dx - U(Z', f) < \varepsilon/2.$$

Diese Zerlegung bestehe aus  $r+2$  Punkten mit  $r \geq 1$ . Weiter sei  $M := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ , und wir wählen  $N \in \mathbb{N}$  so, dass

$$|Z_n| \leq \frac{\varepsilon}{4rM} \quad \text{für alle } n \geq N$$

(was wegen  $|Z_n| \rightarrow 0$  möglich ist). Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Z'_n := Z_n \cup Z'$  gemeinsame Verfeinerung von  $Z_n$  und  $Z'$ . Nach Lemma 8.5 (a) gilt

$$\int_{*a}^b f(x) dx - U(Z'_n, f) \leq \int_{*a}^b f(x) dx - U(Z', f) < \varepsilon/2. \quad (8.1)$$

Da außerdem beim Übergang von  $Z_n$  zu  $Z'_n$  höchstens  $r$  neue Punkte hinzukommen, gilt

$$U(Z'_n, f) - U(Z_n, f) \leq 2rM|Z_n|. \quad (8.2)$$

Wir überlegen uns (8.2) zunächst für *einen* hinzukommenden Punkt  $t$ . Liegt  $t$  etwa in  $[x_i, x_{i+1}]$ , wobei die  $x_i$  Punkte der Zerlegung  $Z_n$  sind, so hat man

$$\begin{aligned} U(Z'_n, f) - U(Z_n, f) &= \inf_{x \in [x_i, t]} f(x)(t - x_i) + \inf_{x \in [t, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - t) \\ &\quad - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i) \\ &\leq M(t - x_i) + M(x_{i+1} - t) + M(x_{i+1} - x_i) \\ &= 2M\Delta x_i \leq 2M|Z_n|. \end{aligned}$$

Damit ist (8.2) für einen hinzukommenden Punkt gezeigt, und der allgemeine Fall ergibt sich durch Wiederholung dieser Überlegungen.

Addition von (8.1) und (8.2) ergibt nun

$$0 \leq \int_{*a}^b f(x)dx - U(Z_n, f) < \varepsilon/2 + 2rM|Z_n| \leq \varepsilon/2 + \frac{2rM\varepsilon}{4rM} = \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ , woraus die behauptete Konvergenz folgt. ■

Wir nennen eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  *Darboux-integrierbar*, wenn

$$\int_{*a}^b f(x)dx = \int_a^{*b} f(x)dx.$$

**Satz 8.7** *Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Darboux-integrierbar, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  mit  $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$  gibt.*

**Beweis** ( $\Leftarrow$ ) Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen eine Zerlegung  $Z$  mit  $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$ . Wegen

$$U(Z, f) \leq \int_{*a}^b f(x)dx \leq \int_a^{*b} f(x)dx \leq O(Z, f)$$

ist dann erst recht

$$0 \leq \int_a^{*b} f(x)dx - \int_{*a}^b f(x)dx < \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes  $\varepsilon > 0$ . Also sind oberes und unteres Darboux-sches Integral gleich.

( $\Rightarrow$ ) Sei  $f$  Darboux-integrierbar und  $J := \int_{*a}^b f(x)dx$ , und  $\varepsilon > 0$  sei beliebig vorgegeben. Da  $J$  das Infimum von Ober- und das Supremum von Untersummen ist, gibt es Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $[a, b]$  so, dass

$$J - U(Z_1, f) > \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad O(Z_2, f) - J < \varepsilon/2.$$

Sei  $Z$  eine gemeinsame Verfeinerung von  $Z_1$  und  $Z_2$ . Dann ist nach Lemma 8.5 (a)  $U(Z_1, f) \leq U(Z, f)$  sowie  $O(Z, f) \leq O(Z_2, f)$  und folglich

$$J - U(Z, f) < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad O(Z, f) - J < \varepsilon/2.$$

Addition dieser Ungleichungen ergibt  $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$ . ■

Der Zusammenhang zwischen Riemann- und Darboux-Integrierbarkeit wird durch folgenden Satz hergestellt.

**Satz 8.8** *Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie Darboux-integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{*a}^b f(x)dx = \int_a^{*b} f(x)dx.$$

**Beweis** ( $\implies$ ) Sei  $f$  Darboux-integrierbar und  $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))$  eine Riemann-Folge für  $f$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dann

$$U(Z_n, f) \leq S(Z_n, \xi^{(n)}, f) \leq O(Z_n, f). \quad (8.3)$$

Nach Satz 8.6 konvergiert die linke Seite von (8.3) für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\int_a^b f(x)dx$  und die rechte Seite gegen  $\int_a^{*b} f(x)dx$ , und diese Grenzwerte sind gleich. Dann muss aber auch die Riemann-Folge konvergieren, und ihr Grenzwert stimmt mit  $\int_{*a}^b f(x)dx$  überein (Satz 4.2). Also ist  $f$  Riemann-integrierbar.

( $\impliedby$ ) Sei  $f$  Riemann-integrierbar und  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wir konstruieren zwei spezielle Riemann-Folgen für  $f$  wie folgt:  $Z_n$  sei die Zerlegung von  $[a, b]$  in  $n$  Intervalle gleicher Länge, und  $\xi'_i, \xi''_i \in [x_i, x_{i+1}]$  seien so gewählt, dass

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - f(\xi'_i) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad f(\xi''_i) - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \quad (8.4)$$

Wir setzen noch  $\xi_{\text{sup}}^{(n)} := (\xi'_0, \dots, \xi'_{n-1})$  und  $\xi_{\text{inf}}^{(n)} := (\xi''_0, \dots, \xi''_{n-1})$  und erhalten zwei Riemann-Folgen  $(S(Z_n, \xi_{\text{sup}}^{(n)}, f))$  und  $(S(Z_n, \xi_{\text{inf}}^{(n)}, f))$ , die beide gegen  $J := \int_a^b f(x)dx$  konvergieren. Es gibt dann ein  $N$  so, dass

$$|S(Z_N, \xi_{\text{sup}}^{(N)}, f) - J| < \varepsilon/4 \quad \text{und} \quad |S(Z_N, \xi_{\text{inf}}^{(N)}, f) - J| < \varepsilon/4.$$

Zur Abkürzung sei noch  $Z := Z_N, \xi_s := \xi_{\text{sup}}^{(N)}, \xi_i := \xi_{\text{inf}}^{(N)}$ . Wegen (8.4) ist

$$O(Z, f) \leq S(Z, \xi_s, f) + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad U(Z, f) \geq S(Z, \xi_i, f) - \frac{\varepsilon}{4},$$

woraus schließlich

$$\begin{aligned} O(Z, f) - U(Z, f) &\leq S(Z, \xi_s, f) + \frac{\varepsilon}{4} - S(Z, \xi_i, f) + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |S(Z, \xi_s, f) - J| + |J - S(Z, \xi_i, f)| < \varepsilon \end{aligned}$$

folgt. Nach Satz 8.7 ist  $f$  Darboux-integrierbar. ■

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 8.7 und Satz 8.8 ist

**Folgerung 8.9 (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium)** *Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  mit  $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$  existiert.*

Beispielsweise ist für die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

auf  $[a, b]$  jede Obersumme gleich  $b - a$  und jede Untersumme gleich 0. Diese Funktion ist also nicht Riemann-integrierbar.

### 8.3 Einige Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen

**Satz 8.10** *Monotone Funktionen auf  $[a, b]$  sind Riemann-integrierbar.*

**Beweis** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beispielsweise monoton wachsend. Für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sei  $Z_n$  die Zerlegung von  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle gleicher Länge. Dann ist

$$U(Z_n, f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

sowie

$$O(Z_n, f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}).$$

Also ist

$$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) = \frac{b-a}{n} \left( \sum_{k=1}^n f(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k-1}) \right) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

Dies wird kleiner als jedes vorgegebene  $\varepsilon > 0$ , wenn nur  $n$  groß genug ist. ■

**Satz 8.11** *Stetige Funktionen auf  $[a, b]$  sind Riemann-integrierbar.*

**Beweis** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varepsilon > 0$ . Da  $f$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig stetig ist (Satz 6.43), gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass  $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon/(b-a)$  für alle  $t_1, t_2 \in [a, b]$  mit  $|t_1 - t_2| < \delta$ .

Sei  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  Zerlegung von  $[a, b]$  mit  $|Z| < \delta$ . Dann ist

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Supremum und Infimum annehmen, gibt es für jedes  $i$  Punkte  $\xi'_i, \xi''_i \in [x_i, x_{i+1}]$  mit  $f(\xi'_i) = M_i$  und  $f(\xi''_i) = m_i$ . Aus  $x_i \leq \xi'_i, \xi''_i \leq x_{i+1}$  folgt weiter  $|\xi'_i - \xi''_i| < \delta$  und somit  $f(\xi'_i) - f(\xi''_i) < \varepsilon/(b-a)$ . Schließlich erhalten wir

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( f(\xi'_i) - f(\xi''_i) \right) \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## 8.4 Das Lebesguesche Integritätskriterium

Dieses Kriterium stellt einen Zusammenhang zwischen der Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion und der Menge ihrer Unstetigkeiten her. Wir benötigen dafür den folgenden Begriff. Die Länge eines Intervalls  $I$  bezeichnen wir mit  $|I|$ .

**Definition 8.12** Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  heißt Nullmenge, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  höchstens abzählbar viele abgeschlossene Intervalle  $I_1, I_2, \dots$  gibt, die  $M$  überdecken (d.h.  $M \subseteq \bigcup I_j$ ) und für die  $\sum |I_j| < \varepsilon$  ist.

Man kann in dieser Definition “abgeschlossen” durch “offen” ersetzen.

**Lemma 8.13** (a) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

(b) Abzählbare Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind Nullmengen.

(c) Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge.

(d) Eine kompakte Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann Nullmenge, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  endlich viele abgeschlossene Intervalle  $I_j$  mit  $M \subseteq \bigcup_j I_j$  und  $\sum_j |I_j| < \varepsilon$  gibt.

**Beweis** (a) Klar.

(b) Sei  $\{x_1, x_2, \dots\}$  eine abzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann liegt  $x_j$  im Intervall  $I_j := [x_j - \varepsilon 2^{-j-2}, x_j + \varepsilon 2^{-j-2}]$ . Also überdeckt die Vereinigung  $\bigcup_j I_j$  die Menge  $\{x_1, x_2, \dots\}$ , und für die Intervalllängen gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-j-1} = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

(c) Seien  $M_1, M_2, \dots$  Nullmengen und  $\varepsilon > 0$ . Für jede Menge  $M_j$  gibt es Intervalle  $I_{j1}, I_{j2}, \dots$  mit  $\sum_k |I_{jk}| < \varepsilon \cdot 2^{-j}$ , welche  $M_j$  überdecken. Dann überdecken die (abzählbar vielen nach Satz 2.8) Intervalle  $I_{11}, I_{12}, \dots, I_{21}, I_{22}, \dots, I_{31}, I_{32}, \dots$  die Vereinigung  $\bigcup_j M_j$ , und für die Intervalllängen gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{jk}| < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-j} = \varepsilon.$$

(d) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und  $\varepsilon > 0$ . Ist  $M$  Nullmenge, so gibt es abgeschlossene Intervalle  $I_1, I_2, \dots$  mit  $M \subseteq \bigcup_j I_j$  und  $\sum_j |I_j| =: \delta < \varepsilon$ . Ist etwa  $I_j = [a_j, b_j]$  so

setzen wir  $L_j := (a_j - (\varepsilon - \delta)2^{-j-2}, b_j + (\varepsilon - \delta)2^{-j-2})$ . Die offenen Intervalle  $L_j$  überdecken  $M$ . Da  $M$  kompakt ist, überdecken bereits endlich viele dieser Intervalle die Menge  $M$ , etwa  $L_1, \dots, L_k$ . Dann überdecken auch die abgeschlossenen Intervalle  $\overline{L_1}, \dots, \overline{L_k}$  die Menge  $M$ , und für die Intervalllängen gilt:

$$\sum_{j=1}^k |\overline{L_j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\overline{L_j}| = \sum_{j=1}^{\infty} (|I_j| + (\varepsilon - \delta)2^{-j-1}) = \delta + \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $M$  *fast überall stetig*, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. Allgemeiner sagt man, dass eine Eigenschaft *fast überall* erfüllt ist, wenn die ‘‘Ausnahmepunkte’’ eine Nullmenge bilden.

**Satz 8.14 (Lebesguesches Integrierbarkeitskriterium)** *Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt und fast überall stetig ist.*

Für den Beweis benötigen wir einige genauere Aussagen über Unstetigkeitsstellen. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion und  $T$  eine nichtleere Teilmenge von  $[a, b]$ . Die Zahl

$$\Omega_f(T) := \sup_{t \in T} f(t) - \inf_{t \in T} f(t) = \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in T\}$$

heißt *Oszillation* oder *Schwankung von  $f$  auf  $T$* . Für jedes fixierte  $x \in [a, b]$  ist die Funktion

$$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta \mapsto \Omega_f(U_\delta(x) \cap [a, b])$$

monoton wachsend und nach unten durch 0 beschränkt. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega_f(U_\delta(x) \cap [a, b]) =: \omega_f(x).$$

Die Zahl  $\omega_f(x)$  heißt *Oszillation von  $f$  in  $x$* .

**Lemma 8.15** *Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $x \in [a, b]$ , wenn  $\omega_f(x) = 0$ .*

Der Beweis benutzt nur die Definition der Stetigkeit und ist HA. ■

Wir bezeichnen die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  mit  $\Delta(f)$ , und für jedes  $\varepsilon > 0$  setzen wir  $\Delta_\varepsilon(f) := \{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ . Eine unmittelbare Konsequenz von Lemma 8.15 ist

**Folgerung 8.16** *Für jede beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist*

$$\Delta(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f).$$

Man kann leicht zeigen, dass jede der Mengen  $\Delta_\varepsilon(f)$  kompakt ist.

**Folgerung 8.17**  $\Delta(f)$  ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 8.14.

**Beweis** ( $\Leftarrow$ ) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt (d.h. es ist  $|f(x)| \leq C$  für alle  $x$  aus  $[a, b]$ ) und  $\Delta(f)$  sei Nullmenge. Wir zeigen, dass es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  mit  $O(Z, f) - U(Z, f) < (2C + b - a)\varepsilon$  gibt. Aus dem Riemannsches Integrabilitätskriterium folgt dann die Riemann-Integrierbarkeit von  $f$ .

Wie im Beweis von Lemma 8.13 (d) sieht man, dass  $\Delta(f)$  durch abzählbar viele offene Intervalle  $J_1, J_2, \dots$  überdeckt werden kann, wobei für die Längen ihrer Abschließungen gilt:

$$\sum_j |\overline{J}_j| < \varepsilon. \quad (8.5)$$

Weiter: in jedem Punkt  $x \in [a, b] \setminus \Delta(f)$  ist  $f$  stetig. Wir finden daher für jedes solche  $x$  ein offenes Intervall  $U_x$  mit

$$x \in U_x \text{ und } \sup\{f(x) : x \in \overline{U}_x\} - \inf\{f(x) : x \in \overline{U}_x\} < \varepsilon. \quad (8.6)$$

Das System aller Intervalle  $J_j$  und  $U_x$  bildet eine offene Überdeckung von  $[a, b]$ . Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz lassen sich endlich viele Intervalle  $J_{j_1}, \dots, J_{j_n}, U_{x_1}, \dots, U_{x_s}$  auswählen, die ebenfalls  $[a, b]$  überdecken. Sei nun  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  derart, dass jedes ihrer Teilintervalle  $I_0, \dots, I_n$  in einem der Intervalle  $J_{j_1}, \dots, J_{j_n}, U_{x_1}, \dots, U_{x_s}$  liegt (man kann z.B. für  $Z$  die Menge aller Endpunkte der Intervalle  $J_{j_1}, \dots, U_{x_s}$  wählen, die in  $[a, b]$  liegen). Die Differenz

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) |I_k|$$

schreiben wir als  $\Sigma_1 + \Sigma_2$ , wobei  $\Sigma_1$  die Summe aller  $(M_k - m_k) |I_k|$  ist, für die  $I_k$  in einem der Intervalle  $J_j$  liegt und  $\Sigma_2$  die übrigen Summanden enthält. Aus (8.5) bzw. (8.6) folgt dann

$$\Sigma_1 \leq \sum_j 2C |\overline{J}_j| \stackrel{(8.5)}{<} 2C_\varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_2 \stackrel{(8.6)}{\leq} \varepsilon(b - a).$$

Also ist  $O(Z, f) - U(Z, f) = \Sigma_1 + \Sigma_2 < (2C + b - a)\varepsilon$ .

( $\Rightarrow$ ) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Dann ist  $f$  beschränkt nach Satz 8.4. Wir zeigen, dass  $\Delta(f)$  eine Nullmenge ist. Nach Folgerung 8.16 ist

$$\Delta(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f),$$

und da jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist (Lemma 8.8(c) genügt es zu zeigen, dass jede der Mengen  $\Delta_{1/k}(f)$  eine Nullmenge ist. Falls  $\Delta_{1/k}(f) = \emptyset$ , ist nichts zu beweisen. Sei also  $\Delta_{1/k}(f) \neq \emptyset$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Nach dem Riemannsches Integrabilitätskriterium gibt es eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  mit

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \frac{\varepsilon}{2k}. \quad (8.7)$$

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{M}$  die Menge aller Teilintervalle  $I_m$  von  $Z$  mit  $\Delta_{1/k}(f) \cap I_m \neq \emptyset$  und mit  $\mathcal{M}^*$  die Menge aller Intervalle aus  $\mathcal{M}$ , die einen Punkt aus  $\Delta_{1/k}(f)$  in ihrem Inneren enthalten. Die Intervalle aus  $\mathcal{M}$  überdecken  $\Delta_{1/k}(f)$ ; dagegen kann  $\mathcal{M}^*$  leer sein.

Sei zunächst  $I_m \in \mathcal{M}^*$ , und  $x \in \Delta_{1/k}(f)$  liege im Inneren von  $I_m$ . Dann gibt es eine  $\delta$ -Umgebung  $U \subseteq I_m$  von  $x$  mit  $\Omega_f(U) \geq 1/k$ . Erst recht ist dann

$$M_m - m_m = \Omega_f(I_m) \geq \Omega_f(U) \geq 1/k.$$

Hieraus folgt mit (8.7) sofort

$$\frac{\varepsilon}{2k} > O(Z, f) - U(Z, f) \geq \sum_{I_m \in \mathcal{M}^*} (M_m - m_m)|I_m| \geq \frac{1}{k} \sum_{I_m \in \mathcal{M}^*} |I_m|,$$

d.h. es ist

$$\sum_{I_m \in \mathcal{M}^*} |I_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.8)$$

Schließlich bestimmen wir zu den Teilpunkten  $x_0, \dots, x_n$  von  $Z$  abgeschlossene Intervalle  $I'_0, \dots, I'_n$  mit

$$x_k \in I'_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n |I'_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.9)$$

Die Menge  $\Delta_{1/k}(f)$  wird vom endlichen Intervallsystem  $\{I'_0, \dots, I'_n\} \cup \mathcal{M}^*$  überdeckt, und da wegen (8.8) und (8.9) die Summe der entsprechenden Intervalllängen kleiner als  $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$  ist, ist  $\Delta_{1/k}(f)$  eine Nullmenge. ■

**Folgerung 8.18** *Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  abzählbar, so ist  $f$  Riemann-integrierbar.*

Man erhält hieraus wieder die Riemann-Integrierbarkeit stetiger und auch die monotoner Funktionen (wie?). Auch ist beispielsweise die Funktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \text{ irrational,} \\ 1/q & \text{wenn } x = p/q \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \text{ g.g.T. } (p, q) = 1 \end{cases}$$

auf jedem Intervall  $[a, b]$  Riemann-integrierbar. Es ist nämlich  $\Delta(f) = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ .

## 8.5 Eigenschaften des Riemann-Integrals

**Satz 8.19** Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und stimmen  $f$  und  $g$  auf einer in  $[a, b]$  dichten Menge  $M$  überein, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx .$$

**Beweis** Sei  $(Z_n)$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$ . Wegen der Dichtheit von  $M$  in  $[a, b]$  findet man für jedes  $Z_n$  einen Zwischenvektor  $\xi^{(n)} = (\xi_0^{(n)}, \dots, \xi_{n-1}^{(n)})$  mit  $\xi_i^{(n)} \in M$  für alle  $i$  und  $n$ . Dann ist aber auch

$$f(\xi_i^{(n)}) = g(\xi_i^{(n)}) \quad \text{für alle } i \text{ und } n,$$

und die entsprechenden Riemann-Summen stimmen überein:

$$S(Z_n, \xi^{(n)}, f) = S(Z_n, \xi^{(n)}, g) .$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

**Folgerung 8.20** Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und ist  $N := \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$  eine Nullmenge, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx .$$

Der Beweis folgt sofort aus Satz 8.19. Da  $N$  Nullmenge ist, enthält  $N$  keine Intervalle. Also ist  $[a, b] \setminus N$  dicht in  $[a, b]$ , und auf dieser Menge stimmen  $f$  und  $g$  überein. ■

**Satz 8.21** (a) Sei  $f$  auf  $[a, b]$  Riemann-integrierbar und  $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ . Dann ist  $f$  auch auf  $[a_1, b_1]$  Riemann-integrierbar.

(b) Sei  $a < c < b$ , und  $f$  sei auf  $[a, c]$  und auf  $[c, b]$  Riemann-integrierbar. Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx . \quad (8.10)$$

**Beweis** Beide Aussagen ergeben sich leicht mit dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium. Ist etwa  $f$  auf  $[a, b]$  Riemann-integrierbar, so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  auf  $[a, b]$  eine Nullmenge. Dann ist erst recht die Menge der Unstetigkeitsstellen auf  $[a_1, b_1]$  eine Nullmenge, d.h.  $f$  ist auf  $[a_1, b_1]$  Riemann-integrierbar. Aussage (b) ist HA. ■

Die Regel (8.10) gilt bei beliebiger Lage der Punkte  $a, b, c$ , wenn man für  $a < b$  die folgenden Definitionen trifft:

$$\int_b^a f(x) dx := \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x) dx := 0 .$$

**Satz 8.22** Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $\alpha f + \beta g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Die Abbildung  $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$  ist also linear.

**Beweis** Für jede Zerlegung  $Z$  und jeden zugehörigen Zwischenvektor  $\xi$  gilt

$$S(Z, \xi, \alpha f + \beta g) = \alpha S(Z, \xi, f) + \beta S(Z, \xi, g).$$

Aus der Definition des Riemann-Integrals folgt die Behauptung. ■

## 8.6 Integralungleichungen und Mittelwertsätze

**Satz 8.23** Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und ist  $f(x) \geq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , so ist auch

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Für jede Riemannsumme gilt nämlich  $S(Z, \xi, f) \geq S(Z, \xi, g)$ . ■

**Satz 8.24 (Dreiecksungleichung für Integrale)** Für jede Riemann-integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist auch die Funktion  $|f|$  Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (8.11)$$

Beachten Sie die Ähnlichkeit zur bekannten Dreiecksungleichung

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| \quad \text{bzw.} \quad \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

**Beweis** Die Riemann-Integrierbarkeit von  $|f|$  folgt mit dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium: Ist  $f$  in  $x$  stetig, so ist auch  $|f|$  in  $x$  stetig. Also kann  $|f|$  nicht mehr Unstetigkeitsstellen als  $f$  besitzen. Die Ungleichung (8.11) erhält man aus der Dreiecksungleichung für Riemann-Summen:

$$|S(Z, \xi, f)| \leq S(Z, \xi, |f|)$$

oder mit Satz 8.23 aus  $f \leq |f|$  und  $-f \leq |f|$ . ■

**Satz 8.25 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und  $m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ,  $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Dann gibt es ein  $\eta \in [m, M]$  mit

$$\int_a^b f(x)dx = \eta(b - a).$$

Ist  $f$  stetig, so gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $\eta = f(\xi)$ .

Die Zahl  $\eta$  ist für  $a \neq b$  eindeutig bestimmt und heißt *Mittelwert von  $f$  über  $[a, b]$*  (in Analogie zum arithmetischen Mittel von Zahlen).

**Beweis** Offenbar ist  $m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in [a, b]$ , und aus Satz 8.13 folgt

$$m(b - a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a).$$

Jede Zahl aus  $[m(b - a), M(b - a)]$  lässt sich als  $\eta(b - a)$  mit einem  $\eta \in [m, M]$  schreiben. Die Behauptung für stetiges  $f$  folgt aus dem Zwischenwertsatz und aus dem Satz von Weierstraß: Mit  $m$  und  $M$  wird auch jeder Wert aus  $[m, M]$  von  $f$  angenommen. ■

**Satz 8.26 (Erweiterter Mittelwertsatz)** Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, so ist auch  $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Ist zusätzlich  $g \geq 0$  auf  $[a, b]$ , so gibt es ein  $\eta \in [m, M]$  (mit  $m, M$  wie in Satz 8.25) so, dass

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx.$$

Ist  $f$  stetig auf  $[a, b]$ , so gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \eta$ .

**Beweis** Die Riemann-Integrierbarkeit von  $fg$  zeigen Sie im Tutorium. Weiter folgt wie im Beweis von Satz 8.25 aus  $m \leq f \leq M$  bzw.  $mg \leq fg \leq Mg$ , dass

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Ist  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , so folgt hieraus auch  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , und für  $\eta$  kann eine beliebige Zahl aus  $[m, M]$  genommen werden. Falls  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ , so ist

$$\eta := \left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right) / \left( \int_a^b g(x)dx \right) \in [m, M]. \quad \blacksquare$$

Ohne Beweis (vgl. Heuser, Nr. 85.7) vermerken wir noch

**Satz 8.27 (Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung)** Sei  $f$  monoton und  $g$  stetig auf  $[a, b]$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

## 8.7 Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Diese Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen den Begriffen “Ableitung” und “Integral” her, ermöglichen es, eine differenzierbare Funktion bis auf eine Konstante aus ihrer Ableitung zu rekonstruieren und bieten eine bequeme Möglichkeit zur Berechnung zahlreicher Riemann-Integrale.

### 8.7.1 Stammfunktionen

**Definition 8.28** Sind  $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und ist  $F$  differenzierbar auf  $[a, b]$  und  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , so heißt  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .

Mit Folgerung 7.14 erhält man sofort:

**Satz 8.29** (a) Ist  $F$  Stammfunktion von  $f$  und  $C \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $F + C$  Stammfunktion von  $f$ .

(b) Je zwei Stammfunktionen einer gegebenen Funktion unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  wird oft als *unbestimmtes Integral* von  $f$  bezeichnet, und man schreibt  $F = \int f(x)dx$ . Dies ist nicht sehr konsequent. Mit  $f$  ist ja z.B. auch  $F + 1$  Stammfunktion und demzufolge auch  $F + 1 = \int f(x)dx$ . Wir wollen  $\int f(x)dx$  als Bezeichnung für die Menge alle Stammfunktionen betrachten. Anstelle der etwas schwerfälligen Schreibweise

$$\int f(x)dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$$

schreibt man meist (jedoch auch nicht sehr exakt)  $\int f(x)dx = F + C$ .

Aus den uns bekannten Ableitungen spezieller Funktionen erhalten wir die folgenden unbestimmten Integrale (die man zusammen mit einigen anderen als “Grundintegrale” bezeichnet).

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$  auf  $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } \alpha = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } \alpha = -2, -3, -4, \dots \\ (0, \infty) & \text{falls } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{cases}$
- $\int x^{-1} dx = \ln |x| + C$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- $\int e^x dx = e^x + C$  auf  $\mathbb{R}$ .
- $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$  auf  $\mathbb{R}$ .

- $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C \quad \text{auf } \mathbb{R}.$

### 8.7.2 Der (erste) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Satz 8.30** Die Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  besitze auf  $[a, b]$  eine Riemann-integrierbare Ableitung  $f = F'$ . Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a). \quad (8.12)$$

Wir können dieses Resultat auch so formulieren.

**Satz 8.31** Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei Riemann-integrierbar und besitze eine Stammfunktion  $F$ . Dann gilt (8.12) unabhängig von der Wahl von  $F$ .

**Anmerkung 1** Es gibt differenzierbare Funktionen, deren Ableitung *nicht* Riemann-integrierbar ist. Beispielsweise ist für

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

die Ableitung

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkt auf  $[0, 1]$ . Auch gibt es Riemann-integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen (z.B. die Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $[-1, 0)$  gleich  $-1$  und sonst gleich  $1$  ist).

**Anmerkung 2** Statt  $F(b) - F(a)$  schreibt man oft  $F(x)|_a^b$ .

**Beweis von Satz 8.30** Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f := F'$  Riemann-integrierbar. Für jede Zerlegung  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$  von  $[a, b]$  ist

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - f(x_i)).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes  $i = 0, \dots, n-1$  ein  $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$  so, dass

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Der Vektor  $\xi_Z := (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$  ist ein spezieller Zwischenvektor zu  $Z$ , und für diesen gilt

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = S(Z, \xi_Z, f). \quad (8.13)$$

Ist nun  $(Z_n)$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$ , so wählen wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen Zwischenvektor  $\xi_{Z_n}$  wie oben und erhalten aus (8.13)

$$F(b) - F(a) = S(Z_n, \xi_{Z_n}, f) \rightarrow \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Beispiel**

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

### 8.7.3 Der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Satz 8.32** *Jede auf  $[a, b]$  stetige Funktion  $f$  besitzt eine Stammfunktion auf  $[a, b]$ . Eine solche Stammfunktion ist gegeben durch*

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (8.14)$$

**Beweis** Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar. Also existiert für jedes  $x \in [a, b]$  das Integral (8.14), und die Funktion  $F$  ist wohldefiniert. Wir zeigen, dass  $F$  auf  $[a, b]$  differenzierbar und  $F' = f$  ist. Seien  $x, x+h \in [a, b]$  und  $h \neq 0$ . Dann ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Nach Satz 8.25 (Mittelwertsatz) gibt es ein  $\xi \in [x, x+h]$  mit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} f(\xi)(x+h-x) = f(\xi). \quad (8.15)$$

Halten wir  $x$  fest, so hängt  $\xi$  nur von  $h$  ab, und für  $h \rightarrow 0$  strebt  $\xi$  gegen  $x$ . Da  $f$  stetig ist, strebt dann  $f(\xi)$  gegen  $f(x)$ . Also existiert der Grenzwert von (8.15) für  $h \rightarrow 0$ , und es ist

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \blacksquare$$

## 8.8 Integrationstechniken

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung reduziert die Berechnung eines Riemann-Integrals für eine Funktion  $f$  auf die Bestimmung einer Stammfunktion für  $f$ . Wir lernen nun einige Aussagen kennen, die diese Aufgabe erleichtern. Allerdings bleibt die Bestimmung einer Stammfunktion (im Gegensatz zur „umgekehrten“ Aufgabe, der Bestimmung einer Ableitung) ein schwieriges Problem. Bereits für so einfache Funktionen wie  $x \mapsto 1/\ln x$  und  $x \mapsto e^{-x^2}$  (die nach Satz 8.32 eine Stammfunktion auf  $(0, \infty)$  bzw.  $\mathbb{R}$  besitzen) ist es *nicht* möglich,

diese Stammfunktion mit Hilfe endlicher Ausdrücke von „elementaren“ Funktionen (wie Potenzfunktionen oder trigonometrische Funktionen) darzustellen. Wir gewinnen die Regeln für die Bestimmung von Stammfunktionen durch „Umkehrung“ der uns bekannten Differentiationsregeln.

### 8.8.1 Linearität

Sind  $F$  bzw.  $G$  Stammfunktionen von  $f$  bzw.  $g$ , so ist für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$$

Also besitzt auch  $\alpha f + \beta g$  eine Stammfunktion, und es gilt (in Kurzfassung)

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx. \quad (8.16)$$

**Satz 8.33** *Besitzen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Stammfunktionen und sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so besitzt auch  $\alpha f + \beta g$  eine Stammfunktion auf  $[a, b]$ , und es gilt (8.16).*

### 8.8.2 Partielle Integration

Nach der Produktregel  $(uv)' = u'v + uv'$  ist  $uv$  Stammfunktion von  $u'v + uv'$ . Besitzt nun eine der Funktionen  $u'v$  und  $uv'$  eine Stammfunktion, dann auch die andere (Satz 8.33), und wir erhalten

$$uv = \int (u'v + uv') dx = \int u'v dx + \int uv' dx$$

bzw.

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx. \quad (8.17)$$

**Satz 8.34** *Seien  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $[a, b]$ , und  $uv'$  besitze eine Stammfunktion. Dann besitzt auch  $u'v$  eine Stammfunktion auf  $[a, b]$ , und es gilt (8.17).*

#### Beispiel 1

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x + C. \end{aligned}$$

(Hier haben wir (8.17) mit  $v(x) = x$  und  $u(x) = -\cos x$  benutzt.) ■

## Beispiel 2

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

(Hier benutzten wir (8.17) mit  $u(x) = x$ ,  $v(x) = \ln x$ .) ■

Für Riemann-Integrale erhält man mit (8.17):

**Satz 8.35** Seien  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx. \quad (8.18)$$

**Beweis** Aus der stetigen Differenzierbarkeit von  $u$  und  $v$  folgt die Stetigkeit von  $u'v$  und  $uv'$ . Also besitzen beide Funktionen Stammfunktionen, und die Riemann-Integrale in (8.18) existieren. Die Behauptung folgt nun aus (8.17) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. ■

### 8.8.3 Integration durch Substitution

Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , und  $g$  sei differenzierbar. Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{dF(g(t))}{dt} = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Also ist  $\Phi := F \circ g : t \mapsto F(g(t))$  Stammfunktion von  $(f \circ g)g' : t \mapsto f(g(t))g'(t)$ , d.h.

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)}. \quad (8.19)$$

**Satz 8.36** Die Funktion  $f$  besitze auf dem Intervall  $I$  eine Stammfunktion  $F$ , die Funktion  $g$  sei auf einem Intervall  $I_1$  differenzierbar, und es gelte  $g(I_1) \subseteq I$ . Dann besitzt die Funktion  $(f \circ g)g'$  auf  $I_1$  eine Stammfunktion  $\Phi$ , und es gilt (8.19) oder kurz  $\Phi = F \circ g$ .

Besitzt  $g$  eine Umkehrfunktion, so ist natürlich  $F = \Phi \circ g^{-1}$ . Ist  $g^{-1}$  darüber hinaus differenzierbar, folgt hieraus: Ist  $\Phi$  Stammfunktion von  $(f \circ g) \cdot g'$ , so besitzt  $f$  eine Stammfunktion  $F$ , und es gilt  $F = \Phi \circ g^{-1}$ .

**Beispiel 3** Auf  $\mathbb{R}$  suchen wir  $\int \cos t \cdot \sin^2 t \, dt$ . Wählt man  $f(x) = x^2$  und  $g(t) = \sin t$ , so ist  $g'(t) = \cos t$  und

$$\int \cos t \sin^2 t \, dt = \int x^2 dx \Big|_{x=\sin t} = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=\sin t} + C = \frac{\sin^3 t}{3} + C. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 4** Für  $f(x) = 1/x$  erhält man aus (8.19)

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \ln |g(t)| + C. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 5** Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , und sind  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$ , so gilt

$$\int f(at + b) dt = \frac{1}{a} \int f(at + b) \cdot a dt = \frac{1}{a} F(at + b) + C. \quad \blacksquare$$

Die Regel (8.19) führt ein Integral der Form  $\int f(g(t)) g'(t) dt$  auf ein Integral der Form  $\int f(x) dx$  zurück. Häufig möchte man den umgekehrten Weg gehen: Um  $\int f(x) dx$  zu bestimmen, versucht man, die Integrationsvariable als  $x = g(t)$  mit einer bijektiven differenzierbaren Funktion  $g$  zu schreiben und hofft, dass das Integral  $\int f(g(t)) g'(t) dt$  ausgewertet werden kann.

**Beispiel 6** Wir suchen  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  auf  $(-a, a)$ . Dazu substituieren wir  $x := a \sin t$  (beachten Sie: auf  $(-a, a)$  verschwindet die Ableitung  $t \mapsto a \cos t$  von  $x$  nach  $t$  nicht), und wir gelangen zu

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot \cos t dt &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C \\ &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) + C. \end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution  $t = \arcsin \frac{x}{a}$  erhalten wir

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + C. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 7** Wir suchen  $\int \frac{1}{\sin x} dx$  auf  $(0, \pi)$ . Die Substitution  $x = 2 \arctan t$  führt wegen  $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$  und

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

auf das Integral

$$\int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C.$$

Rücksubstitution  $t = \tan \frac{x}{2}$  liefert

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \quad \blacksquare$$

Für Riemann-Integrale kann man die Substitutionsregel wie folgt formulieren.

**Satz 8.37** Sei  $f$  stetig und  $g$  stetig differenzierbar, und die Verkettung  $f \circ g$  sei definiert. Dann ist

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt. \quad (8.20)$$

**Beweis** Nach Voraussetzung sind  $f$  und  $(f \circ g)g'$  stetig, so dass diese Funktionen entsprechend Stammfunktionen  $F$  und  $\Phi$  besitzen und die Integrale in (8.20) definiert sind. Nach Satz 8.36 ist  $\Phi = F \circ g$ . Also ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)$$

und

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)). \quad \blacksquare$$

Besitzt  $g$  eine Umkehrfunktion, so kann man (8.20) schreiben als

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt.$$

## 8.9 Stammfunktionen rationaler Funktionen

Eine Funktion  $P : x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$  heißt *Polynom* vom Grad  $n$ , und  $n$  heißt *Grad* des Polynoms. In Zeichen:  $n = \deg P$ . Sind  $P$  und  $Q \neq 0$  Polynome, so ist der Quotient  $P/Q$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $Q(x) \neq 0$  definiert. Funktionen dieser Gestalt heißen *rational*. Für rationale Funktionen lässt sich stets eine Stammfunktion konstruktiv bestimmen. Dazu benötigen wir einige Resultate aus der Algebra, die wir ohne Beweis zitieren.

Seien  $P, Q$  Polynome mit  $Q \neq 0$ . Zur Bestimmung einer Stammfunktion der rationalen Funktion  $P/Q$  geht man wie folgt vor.

**1. Schritt** Polynomdivision von  $P$  durch  $Q$  liefert Polynome  $R$  und  $S$  mit

$$\frac{P}{Q} = R + \frac{S}{Q}, \quad \text{wobei } \deg S < \deg Q.$$

Für  $R$  kann man eine Stammfunktion angeben. Wir betrachten nur noch  $S/Q$ .

**2. Schritt** Man zerlege das Nennerpolynom  $Q$  in Faktoren 1. und 2. Grades. Dass dies möglich ist, folgt aus nachstehendem Satz.

**Satz 8.38 (Fundamentalsatz der Algebra)** Für jedes Polynom  $Q(x) = \sum_{i=0}^n q_i x^i$  mit  $q_n \neq 0$  und  $q_i \in \mathbb{R}$  gibt es reelle Zahlen  $b_i, c_i, d_i$  und positive natürliche Zahlen  $k_i, m_j, r$  und  $s$  so, dass

$$Q(x) = q_n \prod_{i=1}^r (x - b_i)^{k_i} \prod_{j=1}^s (x^2 + 2c_j x + d_j)^{m_j} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (8.21)$$

mit  $k_1 + \dots + k_r + 2(m_1 + \dots + m_s) = n$  und  $d_j - c_j^2 > 0$  für alle  $j$ .

Zur Bestimmung der  $b_i, c_i, d_i$  ermittelt man die komplexen Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $Q$ . Dann ist  $Q(x) = q_n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$ . Die Terme  $(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$  mit  $\lambda \notin \mathbb{R}$  werden zu  $(x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) = x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + |\lambda|^2$  zusammengefasst.

Die exakte Bestimmung der Nullstellen von  $Q$  ist oft sehr schwierig. Einen Beweis von Satz 8.38 finden Sie in Heuser, Analysis I, Satz 69.3 oder in der Vorlesung zur Funktionentheorie.

**3. Schritt** Ist die Zerlegung (8.21) gefunden, wählt man den Ansatz

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{k_i} \frac{A_{ik}}{(x - b_i)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{m=1}^{m_j} \frac{B_{jm}x + C_{jm}}{(x^2 + 2c_j x + d_j)^m} \quad (8.22)$$

mit zu bestimmenden reellen Zahlen  $A_{ik}, B_{jm}$  und  $C_{jm}$ .

**Satz 8.39 (Partialbruchzerlegung)** Sei  $Q$  wie in (8.21) und  $S$  ein Polynom mit  $\deg S < \deg Q$ . Dann existieren Zahlen  $A_{ik}, B_{jm}$  und  $C_{jm}$ , so dass (8.22) gilt, und diese Zahlen sind eindeutig bestimmt.

Der Beweis ist in Heuser, Analysis I, Satz 69.5. ■

Die Zahlen  $A_{ik}, B_{jm}$  und  $C_{jm}$  können ermittelt werden, indem man (8.22) mit  $Q$  multipliziert und durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Größen aufstellt.

**4. Schritt** Zu allen in (8.22) vorkommenden Brüchen lassen sich Stammfunktionen durch partielle Integration und Substitution effektiv bestimmen. Einige der folgenden Regeln müssen dazu wiederholt angewandt werden:

$$\int \frac{dx}{(x - b)^k} = \begin{cases} \frac{1}{1-k} (x - b)^{1-k} & \text{falls } k > 1 \\ \ln |x - b| & \text{falls } k = 1, \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2cx + d} = \frac{1}{\sqrt{d - c^2}} \arctan \frac{x + c}{\sqrt{d - c^2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2cx + d)^m} = \frac{x + c}{2(m - 1)(d - c^2)(x^2 + 2cx + d)^{m-1}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2m-3)}{2(m-1)(d-c^2)} \int \frac{dx}{(x^2+2cx+d)^{m-1}} \quad \text{für } m \geq 2, \\
\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2+2cx+d} dx &= \frac{\alpha}{2} \ln(x^2+2cx+d) + (\beta - \alpha c) \int \frac{dx}{x^2+2cx+d}, \\
\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+2cx+d)^m} dx &= \frac{-\alpha}{2(m-1)(x^2+2cx+d)^{m-1}} \\
& + (\beta - \alpha c) \int \frac{dx}{(x^2+2cx+d)^{m-1}} \quad \text{für } m \geq 2.
\end{aligned}$$

**Beispiel** Man bestimme  $\int \frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1} dx$ .

**1. Schritt: Polynomdivision**

$$\frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1} = 1 + \frac{x^3+x}{x^4-x^3-x+1}.$$

**2. Schritt: Faktorisierung des Nennerpolynoms**

$$x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1).$$

**3. Schritt: Partialbruchzerlegung** Der Ansatz

$$\frac{x^3+x}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

liefert nach Multiplikation mit  $x^4 - x^3 - x + 1$

$$x^3 + x = A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)^2$$

bzw.

$$x^3 + x = (A_1 + B)x^3 + (A_2 - 2B + C)x^2 + (A_2 + B - 2C)x + (A_2 - A_1 + C).$$

Ein Vergleich der Koeffizienten auf der linken bzw. rechten Seite ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\text{bei } x^3: & \quad A_1 + B = 1 \\
\text{bei } x^2: & \quad A_2 - 2B + C = 0 \\
\text{bei } x^1: & \quad A_2 + B - 2C = 1 \\
\text{bei } x^0: & \quad A_2 - A_1 + C = 0.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist  $A_1 = \frac{2}{3}$ ,  $A_2 = \frac{2}{3}$ ,  $B = \frac{1}{3}$ ,  $C = 0$ . Die zu integrierende Funktion ist also

$$\frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1} = 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{3} \frac{x}{x^2+x+1}.$$

#### 4. Schritt: Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} dx &= \int 1 dx + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{3} \int \frac{x dx}{x^2 + x + 1} \\ &= x + \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{2}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

### 8.10 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir ausschließlich beschränkte Funktionen auf kompakten Intervallen integriert. Durch naheliegende Grenzprozesse erweitern wir nun die Definition des Riemann-Integrals zu sogenannten uneigentlichen Integralen.

#### 8.10.1 Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall

Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei jedem Intervall  $[a, t]$  mit  $t > a$  Riemann-integrierbar. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx \quad (8.23)$$

existiert und endlich ist, so bezeichnen wir ihn mit  $\int_a^\infty f(x) dx$  und nennen ihn *uneigentliches Riemann-Integral* von  $f$ . Man sagt auch, dass  $f$  auf  $[a, \infty)$  *Riemann-integrierbar* ist oder dass  $\int_a^\infty f(x) dx$  *konvergiert*. Ist der Grenzwert (8.23) unendlich oder existiert er nicht, heißt  $\int_a^\infty f(x) dx$  *divergent*. Schließlich heißt  $\int_a^\infty f(x) dx$  *absolut konvergent*, wenn  $\int_a^\infty |f(x)| dx$  konvergiert. Wie bei Reihen folgt aus der absoluten Konvergenz die gewöhnliche (Cauchy-Kriterium). Analoge Definitionen trifft man für

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^a f(x) dx$$

und für

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^a f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.\end{aligned}$$

**Beispiel 1** Es ist

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x^\alpha dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} & \text{falls } \alpha \neq -1 \\ \ln t & \text{falls } \alpha = -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha \geq -1 \quad (\text{Divergenz}) \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \text{falls } \alpha < -1 \quad (\text{Konvergenz}). \end{cases} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Beispiel 2** Wir berechnen  $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ . Eine Stammfunktion des Integranden ist

$$F(x) = -e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} x^k.$$

Dies kann man einfach durch Differenzieren bestätigen. Wir überlegen uns, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ . Hierfür genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad \text{für jedes } k \geq 0. \quad (8.24)$$

Aus der Definition der Exponentialfunktion durch eine Potenzreihe folgt für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und jedes  $x > 0$

$$e^x \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \frac{x^k}{e^x} \leq \frac{(k+1)!}{x}.$$

Grenzübergang  $x \rightarrow \infty$  in der rechten Ungleichung liefert (8.24). Zusammengefasst erhalten wir

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x x^n e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) - F(0) = -F(0) = n! \quad \blacksquare$$

**Beispiel 3** Wir zeigen, dass  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  konvergiert. An der Stelle 0 ist der Integrand nicht definiert. Wegen  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  lässt sich die Funktion  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  aber zu einer auf  $[0, \infty)$  stetigen Funktion fortsetzen, wenn man ihren Wert an der Stelle 0 durch 1 festlegt. Insbesondere existiert  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  als gewöhnliches Riemann-Integral. Wir müssen also noch zeigen, dass  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  konvergiert. Partielle Integration liefert für jedes  $t > 1$

$$\int_1^t \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^t - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Offenbar existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{\cos t}{t} + \cos 1 \right) = \cos 1,$$

und es verbleibt, die Existenz des Grenzwertes  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\cos x}{x^2} dx$  zu beweisen. Wir benutzen das Cauchy-Kriterium und schätzen für  $1 \leq t_1 < t_2$  ab:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} < \frac{1}{t_1}.$$

Ist nun  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so gilt für alle  $t_2 > t_1 > 1/\varepsilon$ :

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| < \varepsilon.$$

Also existiert  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$  und damit auch  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . Der Wert dieses Integrals ist übrigens gleich  $\pi/2$ . ■

Wir haben oben  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  definiert als  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_s^t f(x) dx$ . In diesem Sinn existiert z.B.  $\int_{-\infty}^\infty x dx$  *nicht* als uneigentliches Riemann-Integral. Es ist aber

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \Big|_{-t}^t = 0.$$

**Definition 8.40** Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[-t, t]$  Riemann-integrierbar, und existiert der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx$  im eigentlichen Sinn, so heißt dieser Grenzwert Cauchyscher Hauptwert, und wir bezeichnen ihn mit

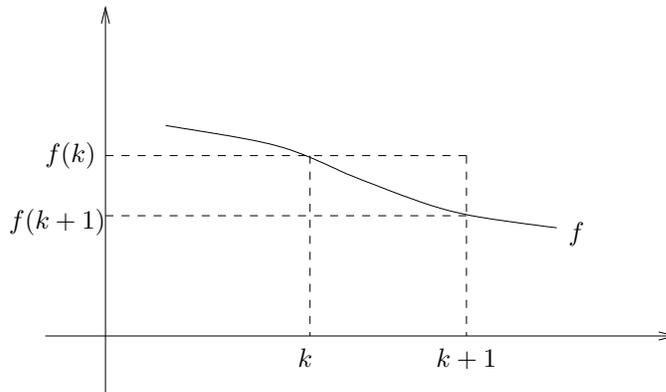
$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx.$$

Beispielsweise ist also  $\text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty x dx = 0$ .

Als eine Anwendung uneigentlicher Integrale vermerken wir das *Integralkriterium* für die Konvergenz von Reihen.

**Satz 8.41** Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  genau dann, wenn das Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$  konvergiert.

**Beweis** Für jedes  $k \geq 1$  ist  $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$ .



Aufsummieren von  $k = 1, \dots, n-1$  ergibt für jedes  $n \geq 2$

$$f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \dots + f(n-1).$$

Für die Partialsummen  $s_n := \sum_{k=1}^n f(k)$  gilt also

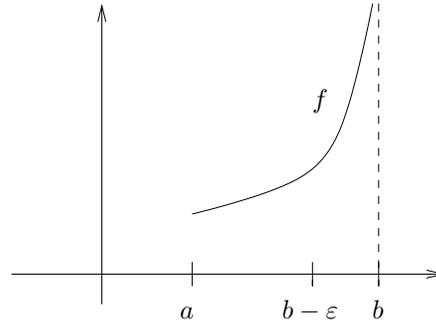
$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq s_{n-1}.$$

Aus der linken Ungleichung folgt: Ist  $\int_1^\infty f(x) dx$  konvergent, so bleiben die  $s_n$  beschränkt, also (da alle Reihenglieder nichtnegativ sind) konvergiert  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ . Analog liefert die rechte Ungleichung die umgekehrte Behauptung. ■

**Beispiel 4** Aus Beispiel 1 wissen wir, daß  $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$  für alle  $\alpha > 1$  konvergiert. Also konvergiert  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$  für alle  $\alpha > 1$ . ■

### 8.10.2 Integrale mit offenem Integrationsintervall

Sei  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $\varepsilon \in (0, b - a)$  auf  $[a, b - \varepsilon]$  Riemann-integrierbar. Wenn der Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$  existiert, so bezeichnen wir ihn mit  $\int_a^b f(x) dx$  und sagen,  $f$  sei auf  $[a, b)$  uneigentlich integrierbar. Eine analoge Definition trifft man für links halboffene Intervalle.



Ist  $a < c < b$  und  $f$  auf  $[a, b] \setminus \{c\}$  definiert, und existieren die uneigentlichen Integrale  $\int_a^c f(x) dx$  und  $\int_c^b f(x) dx$ , so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \searrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx.$$

Schließlich definiert man in diesem Fall den Cauchyschen Hauptwert durch

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

(falls dieser Grenzwert existiert und endlich ist).

**Beispiel 5**  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  ist für  $\alpha \geq 1$  divergent und für  $\alpha < 1$  konvergent. Im letzten Fall ist dieses Integral gleich  $\frac{1}{1-\alpha}$ .

**Beispiel 6**  $\int_0^1 \ln x dx$  konvergiert und hat den Wert  $-1$ .

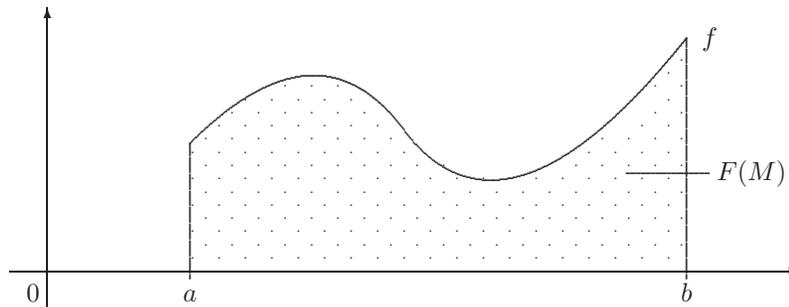
**Beispiel 7**  $\text{V.P.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0$ .

## 8.11 Flächeninhalte

Eines der Motive zur Einführung des bestimmten Integrals war der Wunsch, Flächeninhalte zu definieren und zu berechnen. Ist  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  Riemann-integrierbar, so *definieren* wir als Flächeninhalt der Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

die Zahl  $F(M) := \int_a^b f(x) dx$ .

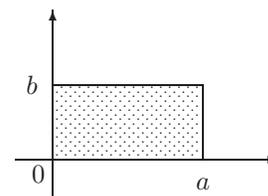


Mit dieser Definition lassen sich auch die Inhalte komplizierter Mengen definieren und berechnen, wenn man akzeptiert, dass der Flächeninhalt die folgenden (aus unserer Erfahrung heraus plausiblen) Eigenschaften aufweist:

- (a) Geht  $M'$  aus  $M$  durch Verschiebung, Drehung oder Spiegelung an einer Geraden hervor, so ist  $F(M') = F(M)$ .
- (b) Kann man  $M$  in zwei Teilmengen  $A, B$  zerlegen, von denen jede einen Flächeninhalt besitzt, so ist  $F(M) = F(A) + F(B)$ .

Die zweite Forderung ist sehr ungenau (man sollte etwas über  $A \cap B$  voraussetzen). Darauf kommen wir später zurück.

**Beispiel 1** Für  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto b$  findet man  $F(M) = \int_0^a b dx = ab$ . Der von uns definierte Flächeninhalt stimmt also für Rechtecke mit dem „bekannten“ Flächeninhalt überein.



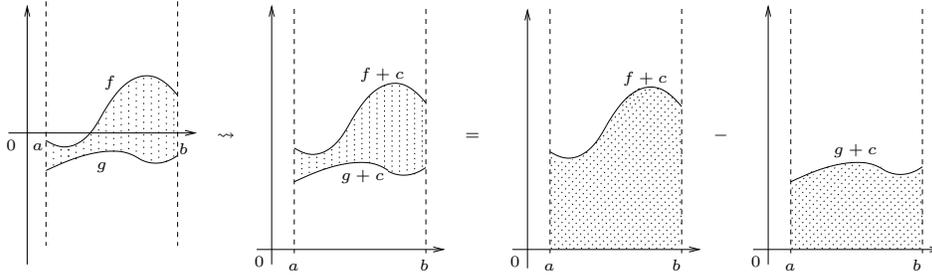
**Beispiel 2** Die Dirichletfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist auf keinem Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  Riemann-integrierbar. Unsere Definition erlaubt es daher nicht, der Menge  $M = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  einen Flächeninhalt zuzuschreiben. ■

**Beispiel 3** Die Funktionen  $f, g$  seien auf  $[a, b]$  Riemann-integrierbar, und es sei  $f(x) \geq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Gesucht ist der Flächeninhalt der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$



Wir verschieben  $M$  um  $c > 0$  in Richtung der positiven  $y$ -Achse, bis das Bild von  $M$  komplett oberhalb der  $x$ -Achse liegt. Mit den Eigenschaften (a), (b) folgt:

$$F(M) = \int_a^b (f(x) + c) dx - \int_a^b (g(x) + c) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 4** Oft ist der Graph von  $f$  in Parameterdarstellung gegeben, etwa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]\}.$$

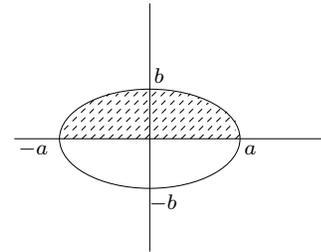
Unter entsprechenden Voraussetzungen an  $x$  und  $y$  (vgl. Satz 8.37) gilt dann

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \dot{x}(t) dt = \int_\alpha^\beta y(t) \dot{x}(t) dt,$$

wobei  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ . Beispielsweise wird durch

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi]$$

eine Ellipse beschrieben. Für ihren Flächeninhalt findet man

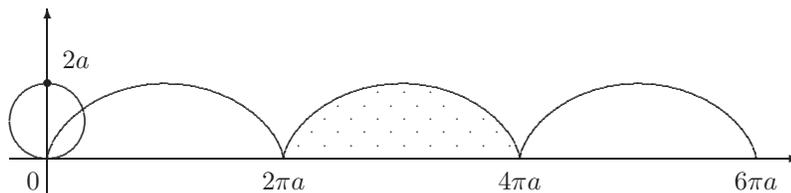


$$\begin{aligned} F(M) &= 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_\pi^0 y(t) \dot{x}(t) dt = 2ab \int_\pi^0 \sin t (-\sin t) dt \\ &= 2ab \int_0^\pi \sin^2 t dt = 2ab \left( -\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2}t \right) \Big|_0^\pi = \pi ab. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Beispiel 5** Durch

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

wird eine *Zykloide* definiert. Diese Kurve beschreibt den Weg eines Punktes auf der Kreisperipherie beim Abrollen des Kreises.



Für die Fläche unter einem Zykloidenbogen findet man

$$\begin{aligned}
 F(M) &= \int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \left( t - 2\sin t + \frac{\cos t \sin t}{2} + \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 3a^2\pi. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$