11 Kurvenintegrale

Wir haben bisher ausschließlich Integrale über Intervallen betrachtet. Ein Ziel dieses Kapitels ist es, Integrale über Kurven zu erklären. Besonders interessiert uns die Frage, wann ein solches Integral nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt.

11.1 Wege und Kurven

Unter einem *Weg* im $\mathbb{R}^n$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Die Punkte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ heißen *Anfangs- bzw. Endpunkt* des Weges. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, so heißt sein Wertebereich

$$\Gamma := \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : \ t \in [a, b]\}$$

die zugehörige *Kurve*. Man beachte: ein Weg γ ist eine Abbildung, die zugehörige Kurve eine Punktmenge. Man sagt auch, dass durch γ eine Parametrisierung der Kurve Γ gegeben ist.
Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big)^T$ heißt (*stetig*) *differenzierbar*, wenn jede seiner Komponenten $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\dot\gamma(t) = \gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)\big)^T$$

die *Ableitung* (oder der Geschwindigkeitsvektor) von γ in t, und die Zahl

$$\|\dot\gamma(t)\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t)|^2\Big)^{1/2}$$

die *Geschwindigkeit* von γ in t. Falls $\gamma'(t_0) \neq 0$, so beschreibt

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)t$$

die *Tangente* an γ im Punkt t_0.

Beispiele 1. Für jedes $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos nt, \ \sin nt)^T$$

ein Weg. Alle diese Wege beschreiben die gleiche Kurve im $\mathbb{R}^2$, nämlich die Einheitskreislinie.

2. Eine Ellipse um den Ursprung mit den Hauptachsen a, b wird durch den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a \, \cos t, \ b \, \sin t)^T$ parametrisiert.

3. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ wird durch $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto a + t(b - a)$ ein Weg definiert. Die zugehörige Kurve ist die Strecke $[a, b]$.

4. Die *Neilsche Parabel* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ ist überall differenzierbar, obwohl die zugehörige Kurve eine Spitze in 0 hat.

5. Eine Schraubenlinie im $\mathbb{R}^n$ läßt sich durch den Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t,\, \sin t,\, t)^T$ beschreiben.

6. Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert einen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(t, f(t)\big)$. Die zugehörige Kurve ist der Graph der Funktion. ■

Wie das erste dieser Beispiele zeigt, kann ein Weg Teile einer Kurve mehrfach durchlaufen. Will man dies ausschließen, muss man verlangen, dass je zwei Punkten $t_1, t_2 \in [a,b]$ mit $t_1 \neq t_2$ unterschiedliche Punkte $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ entsprechen. Da wir auch geschlossene Wege betrachten wollen (d.h. solche mit $\gamma(a) = \gamma(b)$), schließen wir Anfangs- und Endpunkt von dieser Forderung aus.

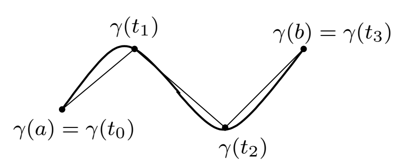
Definition 11.1 *Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt* Jordanweg*, wenn für beliebige Punkte $s, t \in [a,b]$ mit $s < t$ und $\gamma(s) = \gamma(t)$ folgt: $s = a$, $t = b$. Eine Kurve heißt* Jordankurve*, wenn sie durch einen Jordanweg beschrieben werden kann.*

Mit möglicher Ausnahme ihrer Endpunkte sind Jordankurven also *doppelpunktfrei*. Die oben betrachteten Beispiele haben diese Eigenschaft. Kurven (oder Wege) sind wesentlich kompliziertere Objekte als es unsere Anschauung erwarten läßt. So gibt es Kurven, die ein Quadrat im $\mathbb{R}^2$ komplett ausfüllen (Peano-Kurve), und Kurven, die in keinem Punkt eine Tangente besitzen (Koch'sche Schneeflocke). Umso bemerkenswerter ist der folgende Satz, der unserer Anschauung perfekt entspricht, dessen Beweis jedoch außerordentlich schwierig ist.

Satz 11.2 (Jordanscher Kurvensatz) *Jede geschlossene Jordankurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ zerlegt den $\mathbb{R}^2$ in zwei Gebiete G_1, G_2, die von ihr berandet werden (d.h. $\mathbb{R}^2 = G_1 \cup \Gamma \cup G_2$, $\partial G_1 = \partial G_2 = \Gamma$). Genau eines dieser Gebiete – es heißt das* Innengebiet von Γ *– ist beschränkt.*

11.2 Rektifizierbare Wege und Bogenlänge

Wir wollen nun die Länge eines Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definieren und berechnen. Sei $Z := \{t_0, \ldots, t_n\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Wir verbinden für jedes i die Punkte $\gamma(t_i)$ und $\gamma(t_{i+1})$ durch eine Strecke und erhalten einen Polygonzug der Länge



$$L(Z, \gamma) := \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \, .$$

Wir erwarten, dass sich bei Verfeinerung von Z die Länge des Polygonzuges der „Länge von γ annähert“. Da sich bei Verfeinerung von Z die Zahl $L(Z,\gamma)$ niemals verkleinert, definieren wir:

Definition 11.3 *Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt* rektifizierbar*, wenn* $\sup L(Z,\gamma) < \infty$*, wobei das Supremum über alle Zerlegungen Z von $[a,b]$ genommen wird. Ist γ rektifizierbar, so heißt die Zahl $L(\gamma) := \sup L(Z,\gamma)$ die* Weglänge *von γ.*

Das folgende Beispiel zeigt, dass nicht jeder Weg rektifizierbar ist.

Beispiel Der durch die stetige Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ t \cos\frac{\pi}{t} & \text{für } t \in (0,1] \end{cases}$$

definierte Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(t, f(t)\big)$ ist nicht rektifizierbar. Für die Punkte $t_n := 1/n$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_{n+1}) - \gamma(t_n)\| &\geq |f(t_{n+1}) - f(t_n)| = \left|\frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{\cos(n\pi)}{n}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n}\,, \end{aligned}$$

und die harmonische Reihe $\sum 1/n$ divergiert. ■

Für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und jedes $c \in (a,b)$ sind auch $\gamma_1 := \gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma_2 := \gamma|_{[c,b]}$ Wege. Man überzeugt sich leicht davon, dass γ genau dann rektifizierbar ist, wenn γ_1 und γ_2 rektifizierbar sind und dass in diesem Fall $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ ist. Schließlich definieren wir die *Weglängenfunktion*

$$S : [a,b] \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t = a \\ L(\gamma|_{[a,t]}) & \text{für } t \in (a,b]\,. \end{cases}$$

Dann ist $s(b)$ also gerade die Länge des Gesamtweges γ.

Satz 11.4 *Für jeden rektifizierbaren Weg ist seine Weglängenfunktion stetig.*

Einen Beweis finden Sie in Heuser, Analysis II, Satz 177.3. Unter stärkeren Voraussetzungen an γ wollen wir nun Weglängen berechnen.

Satz 11.5 *Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar, die Weglängenfunktion s von γ ist stetig differenzierbar, und für alle $t \in [a,b]$ gilt $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Die Länge $L(\gamma)$ von γ ist gleich*

$$L(\gamma) = \int_a^b s'(t)dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_n'(t)^2}\,dt\,, \tag{11.1}$$

wobei $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\big)^T$.

Beweis Wir benutzen im Beweis Integrale von vektorwertigen Funktionen, die wir komponentenweise erklären.

Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, d.h. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$. Mit der Dreiecksungleichung für Integrale ist

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| \, dt \, ,$$

und Aufsummieren liefert

$$L(Z, \gamma) = \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \, .$$

Alle Polygonzuglängen sind also durch eine von Z unabhängige Konstante nach oben beschränkt. Folglich ist γ rektifizierbar, und

$$L(\gamma) = \sup_Z L(Z, \gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \, . \tag{11.2}$$

Sei nun $t \in [a, b)$ und $h > 0$ so, dass $t + h \leq b$. Dann ist sicher die Länge der Strecke von $\gamma(t)$ bis $\gamma(t + h)$ nicht größer als die Länge des Weges von $\gamma(t)$ bis $\gamma(t + h)$:

$$\|\gamma(t + h) - \gamma(t)\| \leq s(t + h) - s(t) \, .$$

Wenden wir (11.2) speziell auf den Weg $\gamma|_{[t,t+h]}$ an, folgt

$$\left\| \frac{\gamma(t + h) - \gamma(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t + h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(r)\| \, dr \, .$$

Für $h \searrow 0$ strebt die linke Seite dieser Abschätzung gegen $\|\gamma'(t)\|$, und die rechte Seite konvergiert nach dem Mittelwertsatz gegen den gleichen Wert:

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(r)\| \, dr = \|\gamma'(\xi_h)\| \quad \text{mit } t \leq \xi_h \leq t + h \, .$$

Also existiert die rechtsseitige Ableitung von s in t und ist gleich $\|\gamma'(t)\|$. Analog zeigt man die Differenzierbarkeit von links. Aus $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ folgt nun sofort die Behauptung (11.1). ■

Beispiel 1 Sei $a > 0$. Für den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a \, \cos t, \, a \, \sin t)$$

haben wir

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} \, dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a \, .$$

Die durch γ beschriebene Kurve ist eine Kreislinie vom Radius a. Analog führt die Berechnung der Länge des Weges

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a \cos t,\, b \sin t) \quad \text{mit } a > b > 0$$

(dessen zugehörige Kurve eine Ellipse ist) auf das Integral

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt \tag{11.3}$$

mit $\varepsilon := \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ (die sog. *numerische Exzentrizität* der Ellipse). Das Integral in (11.3) ist (für $\varepsilon > 0$) ein sog. *elliptisches Integral* und läßt sich nicht mit Hilfe elementarer Funktionen geschlossen darstellen. ■

Beispiel 2 Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und γ: $[a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ der durch f induzierte Weg, so reduziert sich (11.1) auf

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt\,. \qquad ■$$

Haben wir in Beispiel 1 mit $L(\gamma) = 2\pi a$ tatsächlich den Kreisumfang (d.h. die Länge einer *Kurve*) berechnet? Was wir berechnet haben, ist die Länge eines *Weges*. Um hieraus zu einem vernünftigen Begriff einer *Kurvenlänge* zu gelangen, müssen wir zunächst dafür sorgen, dass der Weg jeden Teil der Kurve nur einmal durchläuft, d.h. wir betrachten ausschließlich Jordanwege bzw. Jordankurven. Selbst für Jordankurven ist damit die Kurvenlänge noch nicht eindeutig festgelegt. Es könnte ja sein, dass ein- und dieselbe Jordankurve durch verschiedene Jordanwege mit verschiedenen Weglängen parametrisiert werden kann. Der folgende Satz klärt dieses Problem.

Satz 11.6 *Sei γ eine Jordankurve, die eine Darstellung durch einen rektifizierbaren Jordanweg besitzt. Dann sind alle Jordandarstellungen rektifizierbar und haben ein- und dieselbe Weglänge.*

Die gemeinsame Weglänge nennen wir die *Länge einer Kurve* Γ. Erst mit diesem Satz können wir sagen, dass ein Kreis mit Radius a einen Umfang $2\pi a$ besitzt (und dass auch Ellipsen einen Umfang besitzen, auch wenn wir ihn nicht elementar angeben können).

Beweis Wir zeigen die Aussage nur für stetig differenzierbare Wege. Einen allgemeinen Beweis finden Sie in Heuser, Analysis II, Satz 178.3. Zunächst eine Vorbemerkung. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg mit zugehöriger Kurve Γ und ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige Bijektion, so ist $\gamma \circ \varphi$: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls ein Weg, der auf die Kurve Γ führt. Da φ stetig und bijektiv ist, tritt einer der folgenden Fälle ein (Satz 6.39):

(a) φ wächst streng monoton. Dann heißt φ *orientierungserhaltend*.

(b) φ fällt streng monoton. Dann heißt φ *orientierungsumkehrend*.

Ist insbesondere φ stetig differenzierbar, so folgt aus $\varphi^{(-1)}(\varphi(t)) = t$ mit der Kettenregel $\varphi^{(-1)'}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$, d.h. es ist $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Es ist klar, dass φ genau dann orientierungserhaltend (bzw. -umkehrend) ist, wenn $\varphi'(t) > 0$ (bzw. < 0) für alle $t \in [\alpha, \beta]$ ist.

Sei nun $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare und orientierungserhaltende Bijektion. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\gamma \circ \varphi) &= \int_\alpha^\beta \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| \, dt = \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(t)) \, \varphi'(t)\| \, dt \\ &= \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(t))\| \, \varphi'(t) dt = \int_a^b \|\gamma'(s)\| \, dx = L(\gamma) \, . \end{aligned}$$

Ein ähnlicher Beweis erfolgt für orientierungsumkehrendes φ. ■

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann kann – wie wir gesehen haben – die Länge des Weges γ durch $\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$ berechnet werden. Ist Γ die durch γ definierte Kurve und $f : \Gamma \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, für die $f \circ \gamma$ Riemann-integrierbar ist, so definiert man allgemeiner das *Integral von f entlang γ* durch

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt \tag{11.4}$$

(für $m > 1$ berechnen wir das Integral auf der rechten Seite komponentenweise). Insbesondere ist also $\int_\gamma 1 = L(\gamma)$, und ist $\gamma : [a, b] \to [a, b]$ die identische Abbildung, so ist

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(t) \, dt$$

das übliche Riemann-Integral. Man kann – ähnlich wie im Beweis von Satz 11.6 – zeigen, dass $\int_\gamma f$ von der Parametrisierung von Γ unabhängig ist.

In die Definition des Kurvenintegrals (11.4) geht nur die Länge des Geschwindigkeitsvektors $\gamma'(t)$ ein, nicht seine Richtung. Dies ist für Anwendungen oft nicht ausreichend (man denke etwa an einen Körper, der sich entlang eines Weges γ in einem Kraftfeld bewegt und bei dem die verrichtete Arbeit berechnet werden soll). In den nächsten Abschnitten werden wir uns einen angemessenen Begriff eines Kurvenintegrals erarbeiten.

11.3 Wegintegrale

Das folgende Beispiel soll die einzuführenden Begriffe motivieren.

Beispiel In einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sei das Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3)\colon U \to \mathbb{R}^3$ gegeben, das wir uns als zeitlich konstantes Kraftfeld denken. Ist $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg, so interpretieren wir das Integral

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)),\, \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{3} F_i(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)\, dt \tag{11.5}$$

als Arbeit, die man aufwenden muss, um sich vom Punkt $\gamma(a)$ zum Punkt $\gamma(b)$ entlang des Weges γ zu bewegen. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass man für ein kleines Wegstück näherungsweise annehmen kann, dass F konstant ist und dass

$$\gamma(t) = \gamma(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\big(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\big)$$

gilt. Dann ist

$$\langle F(\gamma(t)),\, \dot\gamma(t)\rangle\, (t_{i+1} - t_i) = \langle F(\gamma(t_i)),\, \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\rangle\,,$$

und dieser Ausdruck ist proportional zur Weglänge, zur Größe des Kraftfeldes und zum Kosinus des Winkels α zwischen Weg- und Kraftvektor:

$$\langle F(\gamma(t_i)),\, \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\rangle = \cos\alpha\, \|F(\gamma(t_i))\|\, \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|\,.$$

Steht insbesondere das Kraftfeld senkrecht zur Wegrichtung, so wird keine Arbeit verrichtet. ■

Wir werden uns also mit Integralen der Gestalt (11.5), d.h. mit $\int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\, dt$ befassen müssen, wobei f ein Vektorfeld ist. Dazu treffen wir folgende Definition.

Definition 11.7 *Seien $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg mit zugehöriger Kurve Γ und $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann definieren wir das* Wegintegral *von f entlang γ durch*

$$\int_\gamma f \cdot dx := \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)\, dt\,. \tag{11.6}$$

Anstelle von (11.6) findet man auch die Schreibweise

$$\int_\gamma f_1\, dx_1 + \ldots + f_n\, dx_n,$$

die man im Rahmen der Theorie der Pfaffschen Formen verstehen kann (vgl. Barner/Flohr, Analysis II, Abschnitt 17.1).

Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ des Intervalles $[a,b]$ so gibt, dass die Wege

$$\gamma^{(i)} := \gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}^n\,, \quad i = 0, \ldots, m-1$$

stetig differenzierbar sind. Für stückweise stetig differenzierbare Wege γ und stetige Vektorfelder f definieren wir das Wegintegral durch

$$\int_\gamma f \cdot dx := \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\gamma^{(i)}} f \cdot dx.$$

Die folgenden Eigenschaften von Wegintegralen sind leicht zu sehen. Dabei ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, und f und g sind stetige Vektorfelder.

(a)
$$\int_\gamma (f+g) \cdot dx = \int_\gamma f \cdot dx + \int_\gamma g \cdot dx, \qquad \int_\gamma (cf) \cdot dx = c \int_\gamma f \cdot dx.$$

(b) Für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bezeichne $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ den *entgegengesetzten Weg*, d.h. $\gamma^-(t) := \gamma(a+b-t)$. Offenbar beschreiben γ und γ^- die gleiche Kurve, die nur in unterschiedlicher Richtung durchlaufen wird. Es gilt

$$\int_\gamma f \cdot dx = -\int_{\gamma^-} f \cdot dx.$$

(c) Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und $c \in (a,b)$, so sind auch $\gamma_1 := \gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma_2 := \gamma|_{[c,b]}$ stückweise stetig differenzierbare Wege, und es gilt

$$\int_\gamma f \cdot dx = \int_{\gamma_1} f \cdot dx + \int_{\gamma_2} f \cdot dx.$$

(d)
$$\left| \int_\gamma f \cdot dx \right| \le \max_{t \in \Gamma} \|f(t)\|_2 \cdot L(\gamma).$$

Wir untersuchen nun, inwieweit $\int_\gamma f \cdot dx$ tatsächlich vom Weg γ oder nur von der durch γ definierten Kurve abhängt.

Satz 11.8 *Seien $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg, $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Dann ist $\gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg mit der gleichen Bildkurve wie γ und den gleichen Anfangs- und Endpunkten, und es gilt*

$$\int_\gamma f \cdot dx = \int_{\gamma \circ \varphi} f \cdot dx.$$

Beweis Mit Ketten- und Substitutionsregel finden wir

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\varphi} f\cdot dx &= \int_\alpha^\beta \omega\big((\gamma\circ\varphi)(t)\big)\big((\gamma\circ\varphi)'(t)\big)\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \omega\big((\gamma\circ\varphi)(t)\big)\big(\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))\big)\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \omega\big((\gamma\circ\varphi)(t)\big)\big(\gamma'(\varphi(t))\big)\,\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \omega\big(\gamma(s)\big)\big(\gamma'(s)\big)\,ds = \int_\gamma f\cdot dx\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass für jede stetig differenzierbare Bijektion $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ mit $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$ gilt:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f\cdot dx = -\int_\gamma f\cdot dx\,.$$

Bei Umkehrung der Orientierung ändert das Kurvenintegral also sein Vorzeichen.

Beispiel 1 Ein Punkt P bewege sich auf dem Weg

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (a\,\cos t,\, a\,\sin t,\, \frac{h}{2\pi}\,t)$$

von $\gamma(0) = (a,0,0)$ nach $\gamma(2\pi) = (a,0,h)$. Dabei wirke eine Kraft $F(x,y,z) = (F_1,F_2,F_3) = -\alpha(x,y,z)$ mit $\alpha > 0$. Für die zu leistende Arbeit finden wir

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma F\cdot dx = \int_0^{2\pi} \big(F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + F_3(\gamma(t))\gamma_3'(t)\big)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big((-\alpha a\,\cos t)(-a\,\sin t) + (-\alpha a\,\sin t)(a\,\cos t) + \big(-\alpha\,\frac{h}{2\pi}\,t\big)\big(\frac{h}{2\pi}\big)\Big)\,dt \\
&= -\alpha\,\frac{h^2}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} t\,dt = -\frac{\alpha h^2}{(2\pi)^2}\,\frac{(2\pi)^2}{2} = -\frac{\alpha h^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Bewegen wir P unter Einfluss der gleichen Kraft entlang von

$$\gamma : [0,h] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (a,0,t)$$

von $(a,0,0)$ nach $(a,0,h)$, so ergibt sich wegen

$$\int_\gamma F\cdot dx = \int_0^h F_3(\gamma(t))\gamma_3'(t)dt = \int_0^h (-\alpha t)\,dt = -\frac{\alpha h^2}{2}$$

die gleiche geleistete Arbeit. $\blacksquare$

Dieses Resultat ist kein Zufall. Verantwortlich für die beobachtete Wegunabhängigkeit des Integrals ist eine spezielle Eigenschaft der Funktion F.

Definition 11.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt* Gradientenfeld *(oder* vollständiges Differential*), wenn es eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$f(x) = (\operatorname{grad} \varphi)(x) \quad \forall x \in U. \tag{11.7}$$

φ heißt dann auch Stammfunktion *von f (und in der Physik heißt $-\varphi$ ein* Potential *von f).*

Beispiel 2 Die Funktion $f(x, y, z) = -\alpha(x, y, z)$ aus Beispiel 1 ist ein Gradientenfeld, da z.B. für $\varphi(x, y, z) = -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ die Beziehung (11.7) gilt. Physikalisch interessanter ist folgendes Beispiel. Denken wir uns eine Masse m im Nullpunkt eines Koordinatensystems konzentriert, so übt sie auf einen Punkt mit der Masse 1, der sich in $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ befindet, eine Kraft f der Stärke

$$\|f\| = G\frac{m}{\|(x, y, z)\|^2} = \frac{Gm}{x^2 + y^2 + z^2}$$

aus (Newtonsches Gravitationsgesetz). Diese Kraft weist zum Nullpunkt, hat also die Richtung $\frac{-(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$, und demzufolge ist

$$f(x, y, z) = -\frac{Gm}{\|(x, y, z)\|^3}\,(x, y, z) = -\frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,(x, y, z).$$

Auch diese Funktion ist ein Gradientenfeld; für die Funktion φ,

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Gm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{für } (x, y, z) \neq 0$$

gilt nämlich $\operatorname{grad} \varphi = f$. ■

Satz 11.10 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (d.h. F besitzt auf U stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach allen Veränderlichen). Sind a, b zwei Punkte aus U, und ist γ irgendein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit Anfangspunkt a und Endpunkt b, der ganz in U verläuft, so ist*

$$\int_\gamma \operatorname{grad} F \cdot dx = F(b) - F(a). \tag{11.8}$$

Das Wegintegral über ein stetiges Gradientenfeld längs eines stückweise glatten Weges hängt also nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht vom konkreten Verlauf des Weges. Man kann Satz 11.10 als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung betrachten.

Beweis Wir betrachten zunächst den speziellen Fall, wo a und b Anfangs- bzw. Endpunkt eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ sind, d.h. $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$. Dann ist

$$\int_\gamma (\operatorname{grad} \varphi)(x) \cdot dx = \int_\alpha^\beta (\operatorname{grad} \varphi)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Nach der Kettenregel ist $(\operatorname{grad}\varphi)(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ gerade die Ableitung der Funktion $\phi(t) := \varphi(\gamma(t)) = (\varphi\circ\gamma)(t)$. Wir erhalten also

$$\int_\gamma (\operatorname{grad}\varphi)(x)\cdot dx = \int_\alpha^\beta \phi'(t)\,dt = \phi(\beta)-\phi(\alpha)$$

mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Schließlich ist $\phi(\beta)-\phi(\alpha) = \varphi(\gamma(\beta))-\varphi(\gamma(\alpha)) = \varphi(b)-\varphi(a)$.

Der allgemeine Fall eines stückweise stetig differenzierbaren Weges ergibt sich durch Zusammensetzen der einzelnen Integrale. ■

Ist γ ein geschlossener Weg (d.h. ist $\gamma(a)=\gamma(b)$) so erhalten wir insbesondere

$$\int_\gamma \operatorname{grad} F\cdot dx = 0\,.$$

Beispiel 3 Auf $U := \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ betrachten wir das Vektorfeld

$$f(x,y) := \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

und den geschlossenen Weg

$$\gamma : [0,2\pi]\to U\,,\quad t\mapsto(\cos t,\,\sin t)\,.$$

Wegen $\gamma'(t) = (-\sin t,\,\cos t)$ ist

$$\int_\gamma f\cdot dx = \int_0^{2\pi}\Big(\frac{-\sin t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\,(-\sin t)+\frac{\cos t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\,(\cos t)\Big)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.$$

Die Funktion f ist also kein Gradientenfeld, da das Integral über die geschlossene Kurve γ nicht verschwindet. ■

11.4 Ergänzungen zum Begriff „Zusammenhang“

Für das Weitere müssen wir unsere Kenntnisse über zusammenhängende Mengen vertiefen. Dem in Abschnitt 6.8 entwickelten Zusammenhangsbegriff stellen wir einen zweiten gegenüber.

Definition 11.11 *Ein metrischer Raum (X,d) heißt* wegzusammenhängend, *wenn es für je 2 Punkte $x,y\in X$ einen Weg $\gamma:[a,b]\to X$ mit $\gamma(a)=x$ und $\gamma(b)=y$ gibt.*

Eine Teilmenge $U\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten x,y auch deren Verbindungsstrecke $[x,y] := \{\lambda x+(1-\lambda)y : \lambda\in[0,1]\}$ enthält, und U heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $z\in U$ so gibt, dass $[z,x]\subseteq U$ für jedes $x\in U$. Der Punkt z heißt dann ein *Zentrum* von U. Offenbar sind konvexe Mengen sternförmig, und jeder ihrer Punkte ist ein Zentrum. Sternförmige und insbesondere konvexe Mengen sind wegzusammenhängend.

Satz 11.12 *Wegzusammenhängende metrische Räume sind zusammenhängend.*

Beweis Sei (X, d) ein wegzusammenhängender metrischer Raum, und seien U_1, U_2 nichtleere offene Teilmengen von X mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = X$. Dann gibt es Punkte $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ und einen Weg $\gamma : [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = u_1$ und $\gamma(b) = u_2$. Sei Γ die durch γ definierte Kurve. Nach Satz 6.47 ist Γ zusammenhängend. Andererseits gilt

$$U_1 \cap \Gamma \neq \emptyset,\ U_2 \cap \Gamma \neq \emptyset,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset \text{ und } \Gamma \subseteq U_1 \cup U_2\,,$$

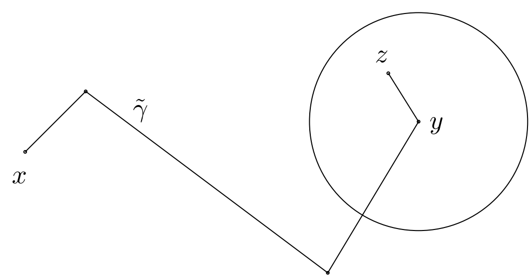
ein Widerspruch. ■

Die Umkehrung von Satz 11.12 gilt im Allgemeinen nicht. Die Menge

$$X := \{(0, y) : y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) : x \in (0, 1],\ y = \sin \frac{1}{x}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist zwar zusammenhängend, jedoch nicht wegzusammenhängend. Die Umkehrung von Satz 11.12 gilt aber für offene Mengen. Eine zusammenhängende offene Menge heißt ein *Gebiet*.

Satz 11.13 *Gebiete im $\mathbb{R}^n$ sind wegzusammenhängend. Genauer: ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $x, y \in U$, dann gibt es einen Polygonzug $\gamma : [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.*



Beweis Sei $x \in U$ beliebig, und sei U_x die Menge aller Punkte $y \in U$, für die es einen Polygonzug $\gamma : [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Wir zeigen, dass U_x offen ist. Sei $y \in U_x$. Da U offen ist, gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(y)$, die ganz in U liegt. Sei $z \in U_\varepsilon(y)$, und sei $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to U$ ein Polygonzug mit $\tilde{\gamma}(0) = x$, $\tilde{\gamma}(1) = y$. Wir „verlängern" $\tilde{\gamma}$ wie folgt:

$$\gamma : [0, 1] \to U, \quad t \mapsto \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{für } t \in [0, 1/2] \\ y + (2t - 1)z & \text{für } t \in [1/2, 1]\,. \end{cases}$$

Dann ist γ ein Polygonzug in U, der x mit z verbindet. Da $z \in U_\varepsilon(y)$ beliebig war, folgt $U_\varepsilon(y) \subseteq U_x$, d.h. U_x ist offen.

Wir zeigen nun, dass auch $U \backslash U_x$ offen ist. Ist $y \in U \backslash U_x$, so gibt es wie oben eine Umgebung $U_\varepsilon(y)$, die in U liegt. Läge ein Punkt $z \in U_\varepsilon(y)$ in U_x, so könnten wir wie oben den Polygonzug von x nach z zu einem Polygonzug von x nach y verlängern, d.h. es wäre $y \in U_x$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $U_\varepsilon(y) \subseteq U \backslash U_x$, d.h. $U \backslash U_x$ ist offen. Für die offenen Mengen U_x und $U \backslash U_x$ gilt nun

$$U_x \cap (U \backslash U_x) = \emptyset \quad \text{und} \quad U_x \cup (U \backslash U_x) = U\,.$$

Da U zusammenhängend ist, muss eine der Mengen U_x und $U \backslash U_x$ leer sein. Wegen $x \in U_x$ ist $U \backslash U_x = \emptyset$, d.h. $U_x = U$. ■

11.5 Stammfunktionen und Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Lemma 11.14 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, und $c \in \mathbb{R}$.*
(a) *Ist F Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ Stammfunktion von f.*
(b) *Ist U ein Gebiet, und sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion.*

Beweis Aussage (a) ist klar, da F und $F + c$ den gleichen Gradienten besitzen. Zu (b) : da F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, gilt $d(F_1 - F_2) = 0$. Wir zeigen: Ist $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf dem Gebiet U und ist $\operatorname{grad} F = 0$, so ist F eine Konstante. Seien $x, y \in U$. Nach Satz 11.13 gibt es einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Aus Satz 11.10 wissen wir, dass

$$F(y) - F(x) = \int_\gamma \operatorname{grad} F \cdot dx = \int_\gamma 0 \cdot dx = 0\,.$$

Also ist F konstant. ■

Besitzen stetige Vektorfelder stets eine Stammfunktion? Im Fall $n = 1$ lautet die Antwort : ja. Nach dem 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hat jede auf einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f eine Stammfunktion. Eine solche Stammfunktion bekommt man durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\,,$$

wobei $x_0 \in [a, b]$ ein fester Punkt ist. Andererseits haben wir am Ende von Abschnitt 11.3 gesehen, dass das Vektorfeld

$$f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\,, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ besitzt.

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang her zwischen der Existenz einer Stammfunktion und der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen.

Satz 11.15 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und f ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann besitzt f genau dann eine Stammfunktion auf U, wenn für jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in U das Integral $\int_\gamma f \cdot dx$ verschwindet.*

Beweis Die Implikation $\Longrightarrow$ haben wir uns bereits im Anschluss an Satz 11.10 überlegt. Nehmen wir nun also an, dass $\int_\gamma f \cdot dx = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U.

Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in U$. Für jeden Punkt $y \in U$ gibt es nach Satz 11.13 einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = y$. Wir möchten definieren

$$F(y) := \int_\gamma f \cdot dx \,. \tag{11.9}$$

Um allerdings auf diese Weise eine Funktion F festlegen zu können, müssen wir uns vergewissern, dass $\int_\gamma f \cdot dx$ nicht von der Wahl des Weges von x nach y abhängt. Sei also $\eta : [0,1] \to U$ ein weiterer stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\eta(0) = x$ und $\eta(1) = y$. Wir betrachten den Weg

$$\alpha : [0,2] \to U, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [0,1] \\ \eta(2-t) & \text{für } t \in [1,2] \,. \end{cases}$$

Offenbar ist α wieder stückweise stetig differenzierbar, und es gilt $\alpha(0) = \alpha(2) = x$, d.h. der Weg α ist geschlossen. Nach Voraussetzung ist daher

$$0 = \int_\alpha f \cdot dx = \int_{\alpha|_{[0,1]}} f \cdot dx + \int_{\alpha|_{[1,2]}} f \cdot dx = \int_\gamma f \cdot dx - \int_\eta f \cdot dx \,,$$

da im zweiten Teilstück von α der Weg η rückwärts durchlaufen wird. Also ist tatsächlich $\int_\gamma f \cdot dx$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ abhängig. Wir schreiben auch $\int_{x_0}^y f \cdot dx$ statt $\int_\gamma f \cdot dx$.

Wir zeigen nun, dass F Stammfunktion von f ist. Ist $f = (f_1, \ldots, f_n)$, so haben wir zu zeigen, dass F stetig differenzierbar in jedem Punkt $y \in U$ ist und dass $\frac{\partial F}{\partial x_i}(y) = f_i(y)$ für alle i ist.

Sei $y \in U$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so liegt mit y auch die komplette Umgebung $U_\varepsilon(y)$ in U. Für alle $z \in U_\varepsilon(y)$ ist dann

$$F(z) = \int_{x_0}^z f \cdot dx = \int_{x_0}^y f \cdot dx + \int_y^z f \cdot dx = F(y) + \int_y^z f \cdot dx \,.$$

Wir betrachten den Weg

$$\gamma_z : [0,1] \to U_\varepsilon(y) \,, \quad t \mapsto y + t(z-y) \,,$$

der y mit z verbindet. Mit $z - y := h$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
F(y+h) - F(y) &= \int_y^{y+h} f \cdot dx = \int_{\gamma_z} f \cdot dx \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(y+th)h_i\,dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_i(y+h)\,dt \cdot h_i\,.
\end{aligned}
$$

Wählen wir speziell h so, dass alle Komponenten bis auf die i–te verschwinden, so folgt

$$F(y + h_i e_i) - F(y) = \int_0^1 f_i(y + th_i e_i)\,dt \cdot h_i\,,$$

woraus wir mit dem ersten Teil von Satz 10.28 erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i}(y) &= \lim_{h_i \to 0} \frac{F(y+h_ie_i) - F(y)}{h_i} = \lim_{h_i \to 0} \int_0^1 f_i(y + th_ie_i)\,dt \\
&= \int_0^1 \lim_{h_i \to 0} f_i(y + th_ie_i)\,dt = \int_0^1 f_i(y)\,dt = f_i(y)\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Die Bedingung, dass die Integrale über alle geschlossenen Wege verschwinden, ist in der Regel schwierig zu überprüfen. Unser nächstes Ziel ist ein Kriterium, bei dem nicht Integrations- sondern Differentiationseigenschaften eine Rolle spielen und das meist leichter zu überprüfen ist.

Definition 11.16 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt f* geschlossen*, wenn*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \textit{für alle } i, j \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Besitzt das stetig differenzierbare Vektorfeld f eine Stammfunktion F, so ist f geschlossen. Aus $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ folgt nämlich mit dem Satz von Schwarz (Satz 10.7)

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i dx_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,.$$

Die Geschlossenheit von f ist also *notwendig* für die Existenz einer Stammfunktion, sie ist jedoch im Allgemeinen nicht *hinreichend*, wie das Beispiel

$$f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad \text{auf } U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \tag{11.10}$$

zeigt. Für $f_1(x,y) := -\frac{y}{x^2+y^2}$ und $f_2(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$ ist nämlich

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}\,.$$

Das Vektorfeld f ist also geschlossen, besitzt aber – wie wir bereits wissen – keine Stammfunktion.

Ob die Geschlossenheit eines Vektorfeldes hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion ist, hängt von den Eigenschaften des Gebietes U ab. Wir sehen uns eine einfache Version eines solchen Resultates an.

Satz 11.17 *Ist das Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, so besitzt jedes geschlossene Vektorfeld f auf U eine Stammfunktion.*

Beweis Wir können o.E.d.A. annehmen, dass 0 zu U gehört und ein Zentrum von U ist (andernfalls verschieben wir U geeignet). Für $x \in U$ sei

$$\gamma_x : [0,1] \to U\,, \quad t \mapsto tx$$

und

$$F(x) := \int_{\gamma_x} f \cdot dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(tx)x_i\, dt.$$

(Man beachte, dass wegen der Sternförmigkeit von U der Weg γ_x komplett in U verläuft). Mit dem zweiten Teil von Satz 10.28 erhalten wir, dass F differenzierbar ist und dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}(f_i(tx)x_i)\, dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f_i(tx)}{\partial x_j} \cdot tx_i\, dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_i(tx)\, \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\, dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(tx)}{\partial x_i}\, tx_i\, dt + \int_0^1 f_j(tx)\, dt\,.
\end{aligned}$$

Für $L(t) := f_j(tx)$ finden wir mit der Kettenregel

$$L'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(tx)}{\partial x_i}\, x_i\,,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 L'(t) \cdot t\, dt + \int_0^1 L(t)dt = \int_0^1 (tL(t))'\, dt \\
&= tL(t)\Big|_0^1 = L(1) = f_j(x)\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Wir kommen noch einmal auf das Beispiel (11.10) zurück. Natürlich ist $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ nicht sternförmig. Nehmen wir allerdings aus $\mathbb{R}^2$ die negative Halbachse $(-\infty, 0]$ heraus, so ist $\mathbb{R}\backslash(-\infty, 0]$ sternförmig, und f besitzt auf diesem kleineren Gebiet nach Satz 11.17 eine Stammfunktion.

Das folgende Vorgehen zum Auffinden einer Stammfunktion eines geschlossenen Vektorfeldes $f = (f_1, f_2)$ auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist praktikabel. Wir machen den Ansatz

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2$$

mit einer Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ (von der wir ohne weitere Voraussetzungen nicht wissen, ob sie existiert). Aus $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1$ folgt

$$F(x, y) = \int f_1(x, y)dx + g(y)$$

mit einer von y abhängenden Integrationskonstanten g. Wir leiten dies formal nach y ab und erhalten mit $\frac{\partial F}{\partial y} = f_2$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int f_1(x, y)dx + g'(y) = f_2\,,$$

also

$$g'(y) = f_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int f_1(x, y)dx\,.$$

Durch Integration bezüglich y gewinnt man g und damit F. Eine Probe zeigt, ob F tatsächlich Stammfunktion ist.

Beispiel Für $x \neq 0$ und $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sei

$$f_1(x, y) = -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2, \quad f_2(x, y) = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2\,.$$

Dann ist $f = (f_1, f_2)$ geschlossen (d.h. $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$), und der Ansatz $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = f_2$ liefert

$$F(x, y) = \int \Big(- \frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2\Big)dx = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{x^3}{3} + g(y)\,.$$

Wir differenzieren nach y und setzen die Ableitung gleich f_2:

$$\frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + g'(y) \stackrel{!}{=} f_2(x, y) = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2\,.$$

Dann folgt $g(y) = \frac{y^3}{3} + C$ und $F(x, y) = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + C$. ■