Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21.11.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

5. Tutorium

Gruppenübung

G 13 Abgeschlossene Mengen

Seien A, B abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Man definiert der Abstand zwischen A und B durch $d(A, B) := \inf \|a - b\|$ für $a \in A$ und $b \in B$.

Gebe ein Beispiel von zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen aus $\mathbb{R}^2$, der Abstand zwischen denen gleich Null ist.

G 14 Nullmengen

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge* oder *Menge vom Maß 0*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine höchtens abzählbar Überdeckung $\{Q_i\}_{i \in A}$ von M durch offene (oder abgeschlossene) Intervalle Q_i[1] gibt, so dass

$$\sum_{i \in A} |Q_i| < \epsilon.$$

Zeige:

a) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

b) Jede endliche Menge von Punkten ist eine Nullmenge.

c) Die Vereinigung höchstens abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

d) Eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung $\{Q_i\}_{i=1}^n$ mit offenen (oder abgeschlossenen) Intervallen gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} |Q_i| < \epsilon.$$

G 15 Riemann-Integrierbarkeit

Wir sagen eine Aussage $p = p(x)$ gilt *fast überall* (f. ü.) in $M \subset \mathbb{R}^n$, falls die Menge $\{x \in M \mid p(x) = \text{falsch}\}$ eine Nullmenge ist.

Zeige: Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$, dann gilt

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \text{ f.ü.}$$

[1] $Q_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x < b_i\}$, $|Q_i| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.