Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

07.11.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

3. Tutorium

Gruppenübung

G 8 Riemann-Integrierbarkeit

Für $-\infty < a < b < \infty$ sei

$$C_0^1([a,b]) := \{\phi \in C^1([a,b]) \mid \phi(a) = \phi(b) = 0\},$$

wobei $C^1([a,b])$ der Raum alle stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$ ist. Für $u \in C([a,b])$ gelte

$$\int_a^b u\phi' dt = 0 \quad \forall \phi \in C_0^1([a,b]).$$

Zeige, dass die Funktion $u(t)$ in der Form

$$u(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b u ds \quad \forall t \in [a,b]$$

dargestellt werden kann.

Hinweis: Für $c_0 \in \mathbb{R}$ definiere die Funktion

$$\phi_0(t) := \int_a^t \big(u(s) - c_0\big) ds \quad \forall t \in [a,b]$$

so, dass $\phi_0 \in C_0^1([a,b])$ ist.

G 9 Fundamentallemma der Variationsrechnung

Für die Funktionen $u, v \in C([a,b])$ gelte

$$\int_a^b \big(u\phi + v\phi'\big) dt = 0 \quad \forall \phi \in C_0^1([a,b]).$$

Zeige, dass dann gilt

- $\exists v' \in C([a,b])$,
- $u(t) - v'(t) = 0, \quad \forall t \in [a,b]$.

Hinweis: Betrachte die Funktion

$$U(t) := \int_a^t u(s) ds, \quad t \in [a,b].$$

Folgerung aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung
Für $u \in C([a,b])$ gelte

$$\int_a^b u\phi dt = 0 \quad \forall \phi \in C_0^1([a,b]).$$

Dann ist

$$u(t) = 0, \quad \forall t \in [a,b].$$