Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13.02.2009

Analysis II für M, HLM, Ph

14. Tutorium

Gruppenübung

G 39 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$

Skizziere grob die Mengen und begründe, welche davon 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ sind:

$$E := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 4y^2 = 1\big\}\,; \quad L := \mathbb{R} \times \{0\}\,; \quad G := \big\{(x, \sin(x)) \colon x \in]0,\pi[\big\}\,;$$

$$R := \partial\left([0,1]^2\right); \quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}; \quad M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^2(1-x^2)\big\}.$$

G 40 Kompakta mit glattem Rand

Skizziere grob die Menge $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. Finde ∂K und zeige, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

G 41 Rechenaufgabe zum Greenschen Integralsatz

Wir betrachten die Kompakta mit glattem Rand $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$ und $R := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$ in $\mathbb{R}^2$. Berechne die Integrale

$$\int_{\partial K} x_2 \, dx_1 \quad \text{und} \quad \int_{\partial R} x_2 \, dx_1\,,$$

und zwar sowohl direkt als Wegintegral als auch durch Umschreiben in ein geeignetes zweidimensionales Integral über K bzw. R mit dem Greenschen Integralsatz.