Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

30.01.2009

Analysis II für M, HLM, Ph

12. Tutorium

Gruppenübung

G 33 Lokale Umkehrbarkeit

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Funktion und $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass f offen ist, d. h. $f(U)$ ist offen für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

G 34 Lipschitz-Stetigkeit

Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume und $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilmengen.
Eine Funktion $f : A \to B$ erfüllt in einer Menge $M \subseteq A$ die Lipschitz-Bedingung, wenn es eine (nichtnegative) reelle Zahl L gibt, mit der die Bedingung

$$\forall x_1, x_2 \in M : D(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$$

erfüllt ist.
Man sagt, dass f Lipschitz mit Lipschitz-Konstante L ist.
Zeige:

1. Jede Lipschitz-Funktion ist stetig.
2. Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$. Für alle $x \in X$, sei $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$. Dann ist die Funktion
$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, A)$$
Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante 1.
3. Sei $Lip := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is Lipschitz}\}$. Zeige, dass Lip ein Vektorraum ist, und dass er abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung von Funktionen ist (d.h. $f, g \in Lip \Rightarrow g \circ f \in Lip$).
4. Zeige durch Angabe eines Gegenbeispieles, dass das Produkt von zwei Lipschitz-Funktionen im allgemein keine Lipschitz-Funktion ist.

   Hinweis: Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nicht Lipschitz ist.

G 35 Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei eine Funktion $f : X \to X$ gegeben, die die Ungleichung

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X, x \neq y \tag{1}$$

erfüllt.
Zeige, dass falls X kompakt ist, die Funktion $f : X \to X$ einen Fixpunkt hat.

Hinweis: Zeige, dass die Funktion $h : X \to \mathbb{R}, h(x) = d(x, f(x))$ stetig ist und verwende, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum das Minimum und das Maximum besitzt.