Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23.01.2009

Analysis II für M, HLM, Ph

11. Tutorium

Gruppenübung

G 30 Taylorformel

Berechne näherungsweise $1,05^{1,02}$ mit Hilfe des Taylorpolynoms 2. Grades einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Das Restglied braucht nicht bestimmt zu werden.

G 31 Eine Verallgemeinerung des Banachschen Fixpunktsatzes

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so dass für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ein q mit $0 < q < 1$ existiert, so dass

$$\|T^m x - T^m y\| \leq q\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt. Zeige

1. Es gibt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ von T, das heißt $T(\bar{x}) = \bar{x}$.
2. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $T^k(x) \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x}$.

Hinweis: Der herkömmliche Banachsche Fixpunktsatz (Beh. für $m = 1$) kann verwendet werden.
Gilt für jede Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dass aus $g^m(\bar{x}) = \bar{x}$ folgt $g(\bar{x}) = \bar{x}$?

G 32 Newton-Verfahren

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Fuktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es existieren Konstanten $c, m > 0$, so dass

$$|f'(x)| \geq c, \quad |f''(x)| \leq m$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $f(a) = 0$. Man gebe eine Umgebung U von a an, so dass die Newtonsche Iterationsfolge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

bei beliebigem Startwert $x_0 \in U$ gegen a konvergiert.

Hinweis: Zeige Kontraktion mit Hilfe des Mittelwertsatzes.