Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

16.01.2009

Analysis II für M, HLM, Ph

10. Tutorium

Gruppenübung

G 28 Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Im Satz 5, Forster Kapitel 6, wird der Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher formuliert. Dabei wird es notwendig, Integrale über matrixwertigen Funktionen einzuführen. Um erstmal ein Gefühl für die Sache zu bekommen, betrachten wir ein Beispiel

a) Gegeben sei die Funktion $p :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ mit $p(t) := (t^2, t^3)$. Überlege Dir an diesem Beispiel, wo es Probleme mit der direkten Übertragung des Mittelwertsatzes für Funktionen in einer Veränderlichen gibt.

b) Wende auf die Kurve p Satz 5 aus dem Forster an.

c) Beweise Satz 5 aus dem Forster. Probiere es zunächst selbst! Dokumentiere jeweils die Beweisschritte und die Beweisideen.

G 29 Konvexe Funktionen und Niveaumenge

1. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion ($x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$). Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

   Zeige, dass $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(f(x))$ auch konvex ist.

   Finde ein Beispiel, das die Notwendigkeit der Voraussetzung, dass g monoton wachsend ist, zeigt.

2. Die (untere) Niveaumenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Niveau β ist definiert durch

   $$\mathcal{L}(f, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\}.$$

   Beweise: f ist konvex. $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(f, \beta)$ ist konvex für jedes $\beta \in \mathbb{R}$.

   Gilt auch die Umkehrung?

3. Beweise: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann ist $\mathrm{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C})$ d.h. die Menge der Punkte, wo f ihr Minimum über $\mathcal{C}$ annimmt, konvex.