Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

24.10.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

1. Tutorium

Gruppenübung

G 1 Funktionenfolge

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Abschluß

$$supp(g) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}}$$

in $\mathbb{R}$ der Menge $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ heißt *Träger* von g.

Sei nun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger. (Die Menge $supp(g)$ ist also eine abgeschlossene, beschränkte Menge.) Sei $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Funktionenfolge mit

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x+n).$$

1. Zeige, daß die Funktionenfolge punktweise konvergiert und bestimme die Grenzfunktion.
2. Für welche Funktionen g liegt gleichmäßige Konvergenz von $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vor?

G 2 ABELsches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Wir wollen nun mit Hilfe partieller Summation den folgenden Satz beweisen:

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Seien $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{g_n : D \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von beschränkten Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergiert gleichmäßig auf* D.

(ii) Einer der folgenden Fälle tritt ein:

- *(a)* $g_n(s) \leq g_{n+1}(s)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $s \in D$,
- *(b)* $g_n(s) \geq g_{n+1}(s)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $s \in D$.

(iii) Es gibt eine Konstante $M > 0$ *derart, daß* $|g_n(s)| \leq M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $s \in D$ *gilt.*

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$$

gleichmäßig auf D.

Wir werden nun den Satz in mehreren Schritten beweisen.

1. Setze $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und sei $F_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$. Überlege, daß ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|F_k(s) - f(s)| < \epsilon/4M$$

für $k > N$ gilt.

2. Zeige, daß

$$\left\| \sum_{k=m}^{n-1} (F_k - f)(g_{k+1} - g_k) \right\| \le \frac{\varepsilon}{4M} \|g_n - g_m\|$$

für $n > m > N$ gilt. (Hier geht (ii) ein!)

3. Zeige, daß

$$\| \sum_{k=m}^{n} f_k g_k \| \le \varepsilon \quad \text{für} \quad n > m > N$$

gilt.

4. Schließe daraus, daß $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ gleichmäßig konvergiert.

G 3 (Anwendung des Abelschen Kriteriums für gleichmäßige Konvergenz)
Sei $a > 0$ und setze

$$h_n : [0, a] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto (-1)^n \frac{x + n}{n^2}.$$

1. Zeige daß $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ gleichmäßig konvergiert.
2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n(x)|$?

Partielle Summation
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Seien $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{g_n : D \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Funktionenfolgen und setze $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Beweise für $n > m > 1$ die folgende Formel:

$$\sum_{k=m}^{n} f_k g_k = F_n g_n - F_{m-1} g_m - \sum_{k=m}^{n-1} F_k (g_{k+1} - g_k).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} f_k g_k &= \sum_{k=m}^{n} (F_k - F_{k-1}) g_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} F_k g_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} F_k g_{k+1} \\ &= F_n g_n - F_{m-1} g_m - \sum_{k=m}^{n-1} F_k (g_{k+1} - g_k). \end{aligned}$$