Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
Dr. Abdelhadi Es-Sarhir

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. Juli 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 13

Konvexe Funktionen

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $t \in [0,1]$ die folgende Ungleichung gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \;\leq\; tf(x) + (1-t)f(y)\,.$$

Aufgaben

T 46 Machen Sie sich klar, was diese Definition für den Graphen von f bedeutet.

[Halten Sie x und y fest und fassen Sie beide Seiten der Ungleichung als Funktionen von t auf.]

T 47 Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto |x|$$

und

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2$$

konvex sind.

T 48 Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Sind $x, y \in I$ mit $x \neq y$, so bezeichne $\mu_f(x,y)$ die Steigung der Sekanten durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$; es ist also

$$\mu_f(x,y) \;=\; \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,.$$

Zeigen Sie, dass für $x, y, y' \in I$ mit $x \neq y$ und $x \neq y'$ gilt:

$$y \leq y' \quad \Rightarrow \quad \mu_f(x,y) \;\leq\; \mu_f(x,y')\,.$$

Die Funktion $I \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \mu_f(x,y)$ ist also monoton wachsend.

[Hinweis: Ist etwa $y \leq y' < x$, so ist $t := \frac{y'-y}{x-y} \in [0,1]$ und $y' = tx + (1-t)y$.]

T 49 Es sei $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $x \in\ ]a,b[$. Weiter sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $]x,b[$, die gegen x konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Sekantensteigungen

$$z_n \;:=\; \mu_f(x, x_n)$$

gegen ein $z \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = z\,.$$

(c) Existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{y \nearrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\ ?$$

Falls ja, stimmt dieser notwendig mit der rechtsseitigen Ableitung z überein?

T 50 Es sei $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion.

(a) Sei $x \in\ ]a,b[$. Zeigen Sie, dass $\mu_f(x,y) \le f'(x)$ für alle $y \in\ ]a,x[$ gilt, und $f'(x) \le \mu_f(x,y)$ für alle $y \in\ ]x,b[$.

(b) Schließen Sie, dass f' monoton wächst.

T 51 Sei schließlich $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung monoton wächst. Zeigen Sie, dass dann f konvex ist.

[Hinweis: Mittelwertsatz.]

Nach **T50** und **T51** ist eine differenzierbare Funktion $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ also genau dann konvex, wenn f' monoton wächst.