Department of Mathematics
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dr. A. Es-Sarhir
PD Dr. Helge Glöckner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

06. 07. 2006

Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 12

Folgen von Funktionen- Satz von Dini

T 41 Für $n \in \mathbb{N}$, sei f_n auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f_n(t) = e^{-nt^2}$.

1. Zeigen Sie, dass f_n punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion f konvergiert. Bestimmen Sie f.
2. Zeigen Sie, dass f_n auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig konvergiert, aber die Konvergenz auf allen Intervallen $[a, +\infty[$ oder $]-\infty, -a]$ für $a > 0$ gleichmäßig ist.

T 42 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(t) = \frac{nt^2}{1+nt} \quad \text{falls } t \geq 0, \qquad f_n(t) = \frac{nt^3}{1+nt^2} \quad \text{falls } t \leq 0.$$

Untersuchen Sie die punktweise Konvergenz und die gleichmäßige Konvergenz dieser Folge.

(Hinweis: Für die gleichmäßige Konvergenz benutzen Sie $\sup\limits_{t\geq 0} \frac{t}{1+nt^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$).

T 43 **(Satz von Dini.)**

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, für welche die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ monoton wachsend sind und die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert.

Zeigen Sie, dass die Konvergenz gleichmäßig ist.

(Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie zeigen, dass eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ existiert und gegen ein Punkt $x \in [0,1]$ konvergiert, aber $f(x_m)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.)

T 44 (**Anwendung.**)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Folge P_n durch $P_0(t) = 0$ für $t \in [0,1]$ und

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2)$$

für $t \in [0,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion P_n ein Polynom ist und für $t \in [0,1]$ die folgende Ungleichung gilt:
$$0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}.$$

(b) Zeigen Sie, dass P_n eine wachsende Folge ist, und gegen eine Funktion f punktweise konvergiert. Bestimmen Sie f.

(c) Zeigen Sie, dass P_n auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert.

T 45 Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Funktion $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+nx}.$$

Untersuchen Sie die punktweise Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Liegt gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$ vor ?