



Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 11

Fixpunktsätze, Lipschitz-Stetigkeit und Kontraktionen

In diesem Tutorium beschäftigen wir uns mit verschiedenen Fixpunktsätzen. Unter einem Fixpunktsatz versteht man einen Satz, der Voraussetzungen angibt, die dafür sorgen, dass eine Funktion $f: X \rightarrow X$ (mindestens) einen Fixpunkt besitzt, also ein $p \in X$ mit $f(p) = p$. Als Hilfsmittel treten gewisse Arten von Funktionen auf, die besonders schöne Stetigkeitseigenschaften haben (Lipschitz-stetige Funktionen und Kontraktionen).

Aufgaben

T 38 (Spezialfall des Brouwerschen Fixpunktsatzes).

Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ mindestens einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: Gesucht sind also Nullstellen der stetigen Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$. Überlegen Sie sich zunächst, dass $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$ sein muss.

T 39 (Lipschitz-Stetigkeit). Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \geq 0$ gibt derart, dass

$$(\forall x, y \in X) \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_X(x, y).$$

Diese Eigenschaft nennt man auch eine (globale) Lipschitzbedingung. Kann man $L < 1$ wählen, so nennt man f eine *Kontraktion*.

- (a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.
- (b) Welche der folgenden Funktionen ist Lipschitz-stetig?

$$\begin{array}{llll} f: & [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} & f(x) & := & x \\ g: & [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} & g(x) & := & x^2 \\ h: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & h(x) & := & x^2 \\ w: & [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} & w(x) & := & \sqrt{x} \end{array}$$

- (c) Sind f bzw. g Kontraktionen? Wie steht es mit $s: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) := x^2$?

T 40 (Banachscher Fixpunktsatz).

In dieser Aufgabe beweisen wir einen extrem wichtigen Fixpunktsatz:

Banachscher Fixpunktsatz. *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f: X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.*

Zum Beweis gehen wir in Schritten vor. Zunächst wählen wir ein $L \in [0, 1[$ derart, dass $d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Kontraktion f höchstens einen Fixpunkt haben kann (Widerspruchsbeweis!)

Um die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen, wählen wir irgendeinen Punkt $x_0 \in X$ und definieren rekursiv eine Folge in X via $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir prüfen nun nach, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen einen Fixpunkt von f konvergiert.

- (b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0).$$

- (c) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.
(d) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen ein $p \in X$ konvergiert und dieses p ein Fixpunkt von f ist.

Damit ist der Beweis erledigt. In Anwendungen genügt es häufig, den Fixpunkt p näherungsweise zu kennen. Man begnügt sich dann mit einem der oben rekursiv berechneten Punkte x_n , für genügend großes n . Aus dem Beweis lässt sich eine nützliche Abschätzung für den Fehler der Näherung ableiten:

- (e) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$d(p, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0).$$

- (f) Finden Sie eine Kontraktionskonstante L für

$$f: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) := x^3 - \frac{1}{4};$$

benutzen Sie hierbei, dass $x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$. Um den Fixpunkt p von f näherungsweise zu bestimmen, setzen wir $x_0 := 0$, $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wie groß müssen Sie n wählen, damit Sie sicher sein können, dass

$$|p - x_n| < \frac{1}{100}?$$