Department of Mathematics
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dr. A. Es-Sarhir
PD Dr. Helge Glöckner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22. 06. 2006

# Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 10

## Wachstum und Exponentialfunktion

**T 33 (Wachstum einer Bakterienkolonie )**

Wachstum oder Abnahme einer zeitabhängigen Größe $u(t)$ werden häufig modelliert, indem man annimmt, dass die Zu-bzw. Abnahme pro Zeiteinheit zum augenblicklichen Niveau proportional ist. Wir wollen sehen, wie der Wert $u(t_0 + h)$ am Ende eines Zeitintervalls $[t_0, t_0 + h]$ vom Anfangswert $u(t_0)$ abhängt. Wenn das Intervall sehr kurz ist, wird die Zu-bzw. Abnahme pro Zeiteinheit fast konstant bleiben, so dass näherungsweise

$$\frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} \approx au(t_0) \tag{1}$$

gilt, wobei $a \in \mathbb{R}$ die Proportionalitätskonstante ist.

In Folgenden werden wir sehen, dass die Gleichung

$$u(t) = u(t_0)e^{at}$$

das Wachstum einer Population modelliert.

1. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jede $\varepsilon > 0$ ein $n_0 > 0$ existiert so dass für alle $n \geq n_0$ gilt
$$\left| \frac{e^{ah_n} - 1}{h_n} - a \right| \leq \epsilon$$
(**Hin:** Benutzen Sie $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}$ und die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^{n-2}}{n!}$, $\alpha \geq 0$ ).
2. Zeigen Sie, dass $u(t) = u(t_0)e^{at}$ die Gleichung (1) erfüllt.

**T 34** Was bedeutet das Vorzeichen von $a$?

**T 35** Eine Bakterienpopulation der Anfangsgröße $u_0 = 10^4$ habe eine tägliche Wachstumsrate von 10% (unter günstigen Bedingungen weisen Läusepopulationen ein ähnlich rasches Wachstum auf). Wieviel Bakterien sind nach 10 bzw. nach 20 Tagen vorhanden?

**T 36** Eine exponentiell wachsende Bakterienpopulation der Anfangsgröße $u_0 = 10^4$ habe nach 10 Tagen die Größe $u(10) = 25 \cdot 10^3$. Wie groß ist sie nach 30 Tagen?

**T 37** Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass für $x \geq 0$ die Folge $w_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ monoton wächst.

1. Zeigen Sie mit Induktion die Eigenschaft (**P**): $(1 + u)^n \geq 1 + nu$ für jede reelle Zahl $u > -1$.
2. Zeigen Sie, dass $1 + \frac{x}{n+1} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}$. Beweisen Sie, dass für $|x| < n$ gilt
$$w_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}.$$
3. Verwenden Sie die Eigenschaft (**P**), zum zeigen, dass
$$w_{n+1}(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) = w_n(x).$$