Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16. Juni 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 9

Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen

Wir haben die reellen Zahlen axiomatisch definiert (als einen vollständig angeordenten Körper), wissen aber noch nicht, ob solche Körper überhaupt existieren. In diesem Tutorium holen wir dies nach und konstruieren explizit die reellen Zahlen aus den rationalen.

Hierzu betrachten wir auf dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ die Abstandsfunktion

$$d\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto |x - y|\,.$$

Da wir die reellen Zahlen noch nicht zur Verfügung haben, haben wir hier statt $\mathbb{R}$ (wie üblich) $\mathbb{Q}$ als Wertebereich genommen. Dies stört aber nicht, und wir können trotzdem von konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ reden. Die reellen Zahlen werden schließlich gewisse Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ sein.

Hinweis: Die Konstruktion ist recht umfangreich, und wir erwarten nicht, dass Sie alle Schritte durchführen! Insbesondere die mit Sternchen versehenen Aufgabenteile sollten Sie zwar durchlesen, aber nicht bearbeiten.

Aufgaben

T 30 (Vorüberlegungen zu Cauchy-Folgen).

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(d) Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so gibt es eine rationale Zahl $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass entweder

$$(\forall n \geq n_0) \quad x_n \geq \varepsilon$$

oder $(\forall n \geq n_0)\ \ x_n \leq -\varepsilon$.

(e) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}^\times$ gilt: $a^{-1} - b^{-1} = a^{-1}(b - a)b^{-1}$.

(f) Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(x_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

T 31 **(Die reellen Zahlen als Menge und Körper).** Es sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Cauchy-Folgen rationaler Zahlen.

(a) Wir sagen, zwei Cauchy-Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{C}$ seien *äquivalent* und schreiben $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $x'_n - x_n \to 0$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}$ ist. Wir können somit definieren:

$$\mathbb{R} \;:=\; \mathcal{C}/\!\sim\;.$$

Im Folgenden meint $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ die Äquivalenzklasse von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$.

(b) Zeigen Sie, dass für $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ die "Summe"

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \;:=\; [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

und das "Produkt"

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \;:=\; [(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

wohldefiniert ist, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(d)* Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \cdot)$ ein kommutatives Monoid ist und das Distributivgesetz für Addition und Multiplikation gilt.

(e) Zeigen Sie, dass jedes von 0 verschiedene Element $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ in $\mathbb{R}$ invertierbar ist. Also ist $\mathbb{R}$ ein Körper.

T 32 **(Die Anordnung auf $\mathbb{R}$)** Es sei $\mathbb{R}_+$ die Menge alle $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ derart, dass eine positive rationale Zahl ε existiert und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Man überlegt sich leicht, dass die Menge $\mathbb{R}_+$ wohldefiniert ist (unabhängig von der jeweiligen Wahl des Repräsentanten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ein angeordneter Körper ist.

Wir betrachten nun die Abbildung $\lambda\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $\lambda(x) := [(x, x, x, \ldots)]$.

(b) Zeigen Sie, dass λ injektiv ist.

Wir können also $x \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ identifizieren. Dies ändert nichts an der gegebenen Addition, Multiplikation und Ordnung auf $\mathbb{Q}$, denn man sieht leicht, dass $\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y)$, $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$ und $(x \leq y \Leftrightarrow \lambda(x) \leq \lambda(y))$. Insbesondere können wir nun $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ interpretieren.

(c)* Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ein archimedisch angeordneter Körper ist.

Um einzusehen, dass der angeordnete Körper $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ vollständig ist, sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge. Dann gibt es ein $s_0 \in \mathbb{Z}$ mit $s_0 \geq A$; wir wählen s_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Ist $s_0 - \frac{1}{2} \geq A$, so setzen wir $s_1 := s_0 - \frac{1}{2}$; andernfalls setzen wir $s_1 := s_0$. Rekursiv setzen wir $s_n := s_{n-1} - 2^{-n}$ falls $s_{n-1} - 2^{-n} \geq A$, andernfalls $s_n := s_{n-1}$.

(d) Zeigen Sie, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ ist.

(e)* Zeigen Sie, dass $[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \sup A$.