



## Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 8

### Äquivalenzrelationen

Wir nennen eine Relation  $\sim$  auf einer Menge  $X$  eine *Äquivalenzrelation*, wenn für alle  $a, b, c \in X$  gilt:

- (i)  $a \sim a$  (Reflexivität);
- (ii)  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$  (Symmetrie);
- (iii)  $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$  (Transitivität).

Für ein  $a \in X$  nennt man  $[a] := \{x \in X : x \sim a\}$  die *Äquivalenzklasse* von  $a$ . Ein Element  $b$  einer Äquivalenzklasse  $[a]$  nennt man einen *Repräsentanten* von  $[a]$ .

Überlegen Sie sich, dass für alle  $b \in [a]$  gilt  $[a] = [b]$ .

### Aufgaben

#### T 27 (Äquivalenzrelationen und Partitionen).

Es sei  $X$  eine Menge. Eine *Partition von  $X$*  ist eine Menge  $P \subseteq \mathcal{P}(X)$  nichtleerer Teilmengen von  $X$ , die paarweise disjunkt sind (d.h. für alle  $A_1, A_2 \in P$  mit  $A_1 \neq A_2$  ist  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ) und deren Vereinigung ganz  $X$  ist,  $X = \bigcup_{A \in P} A$ .

- (a) Zeigen Sie: Ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ , so ist die Menge  $X/\sim := \{[x] : x \in X\}$  der Äquivalenzklassen eine Partition von  $X$ .
- (b) Zeigen Sie, dass umgekehrt jede Partition  $P$  von  $X$  zu einer Äquivalenzrelation  $\sim_P$  führt: Man schreibt  $x \sim_P y$  für  $x, y \in X$  genau dann, wenn ein  $A \in P$  existiert mit  $x, y \in A$ .

Man kann leicht zeigen, dass die zur Partition  $X/\sim$  gehörende Äquivalenzrelation wieder  $\sim$  ist. Umgekehrt ist die zu  $\sim_P$  gehörige Partition wieder  $P$ . Somit gilt:

*Die Partitionen von  $X$  entsprechen genau den Äquivalenzrelationen auf  $X$ .*

- (c) Für  $x, y \in \mathbb{R}$  sei  $x \sim y$ , wenn ein  $r > 0$  existiert mit  $y = rx$ . Zeigen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$  ist und finden Sie die Äquivalenzklassen.

**T 28 (“Wohldefiniertheit” und Faktorisieren von Abbildungen).**

Es sei  $X$  eine Menge,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  und  $q: X \rightarrow X/\sim$ ,  $q(x) := [x]$  die sogenannte “kanonische Quotientenabbildung.”

Gegeben eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  möchte man häufig durch Anwenden auf Repräsentanten daraus eine Abbildung  $\tilde{f}: X/\sim \rightarrow Y$  gewinnen:

$$\tilde{f}: X/\sim \rightarrow Y, \quad [x] \mapsto f(x). \quad (1)$$

Nun könnte die rechte Seite aber noch vom gewählten Repräsentanten  $x$  der Äquivalenzklasse  $[x]$  abhängen. Ist dies nicht der Fall, so ist die Abbildung  $\tilde{f}$  sinnvoll definiert. Man sagt,  $\tilde{f}$  sei “wohldefiniert.”

Wir wollen nun präzisieren, wann  $\tilde{f}$  wohldefiniert ist.

- (a) Zeigen Sie, dass es genau dann eine Abbildung  $\tilde{f}: X/\sim \rightarrow Y$  mit  $\tilde{f} \circ q = f$  gibt, wenn aus  $q(x_1) = q(x_2)$  stets  $f(x_1) = f(x_2)$  folgt.
- (b) Zeigen Sie, dass  $\tilde{f}$ , falls es existiert, durch die Bedingung  $\tilde{f} \circ q = f$  eindeutig festgelegt ist.

Sprechweise: Man sagt in voriger Situation auch, dass  $f$  “über die Abbildung  $q$  faktorisiert” und nennt  $\tilde{f}$  die “induzierte” Abbildung.

**T 29 (Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen).**

Auf  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  definieren wir die Relation  $\sim$  durch  $(z, n) \sim (z', n') \Leftrightarrow zn' = z'n$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist. Wir definieren  $\mathbb{Q} := \mathbb{Z}/\sim$ .
- (b) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad [(z_1, n_1)] \cdot [(z_2, n_2)] := [(z_1 z_2, n_1 n_2)] \quad (3)$$

und

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad [(z_1, n_1)] + [(z_2, n_2)] := [(z_1 n_2 + n_1 z_2, n_1 n_2)] \quad (4)$$

wohldefiniert sind.

- (c) Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{Q}, +)$  eine abelsche Gruppe ist, mit Neutralelement  $[(0, 1)]$ .
- (d) Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{Q}, \cdot)$  ein kommutatives Monoid ist mit Neutralelement  $[(1, 1)]$ . Zeigen Sie, dass jedes von  $[(0, 1)]$  verschiedene Element aus  $\mathbb{Q}$  invertierbar ist.

Man kann noch das Distributivgesetz nachprüfen; somit ist  $\mathbb{Q}$  ein Körper.

Man nennt  $\frac{z}{n} := [(z, n)]$  einen Bruch; die obigen Formeln (3) und (4) sind die üblichen Rechenregeln für Addition und Multiplikation von Brüchen.