Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1./2. Juni 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 7

Lösungen quadratischer Gleichungen im Reellen und Komplexen

Aufgaben

T 24 (Komplexe Quadratwurzeln und die p-q-Formel)

(a) Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl, mit $x, y \in \mathbb{R}$. Finden Sie alle komplexen Zahlen $w = a + ib$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) derart, dass $w^2 = z$.

Hinweis: Vergleichen Sie Real- und Imaginärteil von w^2 und z.

(b) Wieviele Quadratwurzeln hat $z \in \mathbb{C}$, falls $z \neq 0$?

(c) Finden Sie explizite Formeln für die komplexen Quadratwurzeln aus $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}_+$.

(d) Zeigen Sie, dass für $p, q \in \mathbb{C}$ die Lösungen der Gleichung

$$z^2 + p\,z + q \;=\; 0$$

gegeben sind durch die Formel

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\,,$$

wobei $\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ eine komplexe Quadratwurzel aus $(\frac{p}{2})^2 - q$ ist.

T 25 (Explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen) Zur Erinnerung: Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert via $s_1 := s_2 := 1$, $s_{n+1} := s_n + s_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Finden Sie alle $q \in \mathbb{R}$ derart, dass $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Es sollten sich für q zwei Lösungen ergeben, ein $\varphi > 0$ und ein $\psi < 0$).

(b) Finden Sie eine geschlossene Formel für die Fibonacci-Zahlen.

Hinweis: Versuchen Sie, $a, b \in \mathbb{R}$ zu finden derart, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad s_n \;=\; a\,\varphi^n \;+\; b\,\psi^n\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} \;=\; \frac{1}{2}\Big(1 + \sqrt{5}\Big)\,;$$

diese Zahl ($= \varphi$ von oben) ist als “goldener Schnitt” bekannt.

Hinweis: Rechnen Sie zunächst nach, dass $|\psi| < \varphi$.

T 26 (Pentagramm und goldener Schnitt)

Der goldene Schnitt φ tritt auch als Längenverhältnis in Pentagrammen auf. Zeigen Sie, dass $\frac{AB}{BC} = \varphi$ im folgenden Pentagramm:

SKIZZE siehe gedrucktes Übungsblatt!

Hinweis: Es ist $AB = BD = CF$ (wobei man letztere Gleichheit durch Parallelverschiebung einsieht).

Wenden Sie einen der Strahlensätze an und schließen Sie, dass $\frac{AB}{BC}$ die Gleichung $x^2 = x + 1$ erfüllt.