Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26. 5. 2006

Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 6

Vollständig angeordnete Körper

T 21 (Intervalle rationaler Zahlen)
Sei K ein vollständig angeordneter Körper.

1. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\psi : K \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}), x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$$

   injektiv ist.
   Hinweis: Verwenden Sie, daß jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält.
2. Zeigen Sie, daß das Bild von ψ genau aus denjenigen nach unten unbeschränkten und nach oben beschränkten Intervallen in $\mathbb{Q}$ besteht, die kein Maximum besitzen.
3. Zeigen Sie, daß die rationalen Zahlen in K genau auf diejenigen Intervalle aus 2. abgebildet werden, die in $\mathbb{Q}$ ein Supremum haben.
4. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}$ nicht vollständig angeordnet ist.

T 22 (Bijektivität von Φ)
Seien K und L zwei vollständig angeordnete Körper. Wie im Beweis von Satz II.2.24 sei

$$\Phi : K \to L, x \mapsto \sup_L\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

Vollziehen Sie anhand des Skriptes nach, daß

1. Φ eine wohldefinierte Abbildung von K nach L ist,
2. Φ injektiv ist,
3. Φ surjektiv ist.

T 23 (Monotonie von Φ)
Zeigen Sie, daß $\Phi(K_+) \subseteq L_+$.
Hinweis: Verwenden Sie, daß jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält, insbesondere also $]0, x[$ für beliebiges $0 < x \in K$.