Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18./19. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 5

Metrische Räume

Aufgaben

T 18 (Beispiele von Metriken)

(a) Es sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d\colon X \times X \to [0,\infty[\,, \quad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y; \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X ist.

(b) (Manhattan-Metrik). Zeigen Sie, dass

$$d_1\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty[\,, \qquad d_1((x,y),(x',y')) := |x-x'| + |y-y'|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist. Was bedeutet der so definierte Abstand geometrisch? (Skizze!)

T 19 (Metriken mit Werten zwischen 0 und 1) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(t) := \frac{t}{1+t}$ die folgenden Eigenschaften hat:

(a) Für alle $t \in [0,\infty[$ ist $0 \leq f(t) \leq 1$;

(b) Für $t \in [0,\infty[$ ist $f(t) = 0$ genau dann, wenn $t = 0$;

(c) f ist streng monoton wachsend, d.h. für alle $s,t \in [0,\infty[$ mit $s < t$ ist $f(s) < f(t)$.

(Hinweis: schreiben Sie $\frac{t}{1+t}$ geschickt um!)

Nun sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\delta\colon X \times X \to [0,\infty[\,, \qquad \delta(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

eine Metrik auf X ist, die zudem nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt.

T 20 (Abstand zweier Mengen) Ist (X,d) ein metrischer Raum, so definiert man den *Abstand* zwischen zwei nicht-leeren Teilmengen $A,B \subseteq X$ als

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{d(a,b)\colon a \in A, b \in B\}\,.$$

Wir betrachten nun $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik, $d(x,y) = |x-y|$. Bestimmen Sie $\operatorname{dist}(A,B)$ für die folgenden Mengen:

(a) $A := \{0\}$, $B := [1,2]$;

(b) $A := \{0\}$, $B :=]1,2]$;

(c) $A := \mathbb{N}$, $B := \{n - \frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\}$.