Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11./12 Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 4

Rechenregeln und Gruppenaxiome

Gegeben sei eine Menge G mit einer Abbildung $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x*y$. Wir betrachten die folgenden Eigenschaften:

(A) *Assoziativgesetz*: $(\forall x, y, z \in G)\ \ x*(y*z) = (x*y)*z$;

(N) *Neutrales Element*: $(\exists e \in G)\ (\forall x \in G)\ \ e*x = x*e = x$;

(I) *Existenz eines Inversen*: $(\forall x \in G)\ (\exists y \in G)\ \ x*y = y*x = e$.

Gelten (A), (N) und (I), so heißt G eine *Gruppe*. Gelten (A) und (N), so nennt man G ein *Monoid*. Gilt (A), so ist G eine *Halbgruppe*.

Aufgaben

T 14 (Rechenregeln).

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $(M, *)$ ein Monoid.

(a) (Eindeutigkeit des Neutralelements). Zeigen Sie: Sind $e, e' \in M$ beides Neutralelemente, so ist $e = e'$. Im Folgenden (wie auch schon in (I)) bezeichne e das eindeutige Neutralelement.

(b) (Eindeutigkeit des Inversen). Es sei $x \in M$ und es gebe sowohl ein Element $\ell \in M$ mit $\ell * x = e$ (ein "linksinverses Element" zu x) und ein $r \in M$ mit $x * r = e$ (ein "Rechtsinverses"). Zeigen Sie, dass dann $\ell = r$. Folgern Sie, dass es zu jedem $x \in M$ höchstens ein inverses Element gibt. Aufgrund der Eindeutigkeit können wir dieses Element fortan mit x^{-1} bezeichnen.

(c) Zeigen Sie, dass das Neutralelement $e \in M$ ein Inverses hat, nämlich $e^{-1} = e$.

(d) Zeigen Sie: Ist $x \in M$ invertierbar, so auch x^{-1}, und es ist $(x^{-1})^{-1} = x$.

(e) Zeigen Sie: Sind $x, y \in M$ beide invertierbar, so auch $x*y$, und es ist $(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

(f) Zeigen Sie: Sind $x, y, z \in G$, so gilt $x * y = z$ genau dann, wenn $x = z * (y^{-1})$. Weiter gilt $x * y = z$ genau dann, wenn $y = x^{-1} * z$.

(g) Zeigen Sie auch, dass für jeden Körper K und $x, y \in K$ gilt:

$$(-x)y = -(xy) \quad \text{und} \quad (-x)(-y) = xy\,.$$

T 15 (Eine nicht abelsche Gruppe).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K^\times := K \setminus \{0\}$. Wir versehen $G := K \times K^\times$ mit der folgenden Verknüpfung:

$$G \times G \to G\,, \qquad (x, a) * (y, b) := (x + a \cdot y, a \cdot b)\,.$$

Zeigen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist, mit Neutralelement $e = (0, 1)$ und Inversen der Form $(x, a)^{-1} = (-a^{-1}x, a^{-1})$.

T 16 (Assoziativgesetz für mehrfache Produkte, I).

In dieser Aufgabe und der nächsten sei $(S, *)$ eine Halbgruppe. Unser Ziel ist ein "Allgemeines Assoziativgesetz": *Auch in Produkten von mehr als drei Elementen kommt es auf die Klammersetzung nicht an.* Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Das Produkt *eines einzelnen* Elements von S sei das Element selbst. Gegeben $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_1, \ldots, x_n \in S$, definieren wir rekursiv $x_1 * \cdots * x_n := (x_1 * \cdots * x_{n-1}) * x_n$ (was im Falle $n = 2$ als $x_1 * x_2$ zu lesen ist).

Zeigen Sie durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_{n+k} \in S$:

$$x_1 * \cdots * x_{n+k} = (x_1 * \cdots * x_n) * (x_{n+1} * \cdots * x_{n+k}) .$$

T 17 (Assoziativgesetz für mehrfache Produkte, II).

Das Produkt *eines* Elements aus S wurde bereits definiert. Rekursiv definieren wir:

Seien $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in S$. Ein Element $p \in S$ heiße ein *Produkt der n Elemente* $x_1, \ldots, x_n$, wenn es ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ gibt, ein Produkt p_1 der k Elemente $x_1, \ldots, x_k$ und ein Produkt p_2 der $n-k$ Elemente $x_{k+1}, \ldots, x_n$ derart, dass $p = p_1 * p_2$.

(a) Um sich die Bedeutung der Definition klarzumachen, bestimme man Formeln für alle möglichen Produkte von 2, 3 oder 4 Elementen.

(b) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: Ist $p \in S$ ein Produkt der n Elemente $x_1, \ldots, x_n \in S$, so gilt

$$p = x_1 * \cdots * x_n ,$$

wobei die rechte Seite wie in **T16** definiert ist. Insbesondere stimmen alle möglichen Produkte der n Elemente $x_1, \ldots, x_n$ überein.