Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4./5. 5. 2006

Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 3

Abzählen von Mengen

T 10 (Binomialkoeffizienten und die Kardinalität der Potenzmenge)

1. Berechnen Sie die folgenden Summen :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

2. Sei M eine endliche Menge. Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

T 11 (Catalan-Zahlen) Abzählprobleme spielen in der Kombinatorik, einem Teilgebiet der diskreten Mathematik, eine wichtige Rolle. In dieser Aufgabe wollen wir uns einige sehr berühmte Beispiele ansehen.

1. (a) Seien A und B gegenüberliegende Ecken eines $(n \times m)$-Gitters (bestehend aus Einheitsquadraten). Weisen Sie die Existenz eines kürzesten Weges von A nach B nach, bestimmen Sie dessen Länge und zählen Sie die Anzahl solcher kürzester Wege.
   Wenn man davon ausgehen würde, daß in Manhattan, New York überall derselbe Verkehr herrschen würde, dann gibt diese Zahl die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten an, auf denen ein Taxifahrer in Manhattan sinnvoll von A nach B fahren kann. (Diese *Manhattan-Metrik* werden Sie später noch kennenlernen.)
   (b) Sei nun $n = m$. Bestimmen Sie die Anzahl der kürzesten Wege, die niemals unterhalb der Diagonalen von A nach B verlaufen. Diese Anzahl wird mit C_n bezeichnet und heißt $n$te **Catalan-Zahl**.
2. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Anordnungen von jeweils n Symbolen (und), so daß niemals eine Klammer geschlossen wird, bevor sie geöffnet wurde.
3. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen vollständigen Klammerungen der Summe $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Dies ist die Anzahl der Terme, die Sie betrachten müßten, wenn Sie die Gültigkeit des Assoziativgesetzes bei einer Summe mit $n+1$ Summanden nachweisen wollten!
4. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, ein konvexes $(n+2)$-Eck Γ in Dreiecke zu zerlegen, deren Eckpunkte schon Eckpunkte von Γ sind.

T 12 (Innenwinkelsumme konvexer Vielecke)
Bestimmen Sie die Innenwinkelsumme eines konvexen $(n+2)$-Eckes.
Hinweis: Zerlegen Sie das $(n+2)$-Eck so wie in Aufgabe **T 11**.4.

T 13 (Schubfachprinzip) Das Schubfachprinzip ist ebenfalls eine beliebte und hilfreiche Beweismethode in der Kombinatorik. Es basiert auf der folgenden Feststellung:

1. Seien X und Y endliche Mengen mit $|X| > |Y|$. Dann gibt es keine injektive Funktion $f : X \to Y$.

2. Stellen Sie sich vor, Sie haben im Supermarkt billig drei Zehnerpacks Socken gekauft (jeweils zehn Paar Socken, die völlig identisch sind). Zur Sicherheit waschen Sie alle neu erworbenen Socken vor dem ersten Tragen.

   Wie viele Socken müssen Sie nach dem Waschen aus der Waschmaschine herausnehmen, damit Sie sicher ein Paar gleicher Socken in der Hand halten,

   (a) wenn Sie nicht zwischen linken und rechten Socken unterscheiden können oder wollen,

   (b) wenn Sie eine linke und eine dazu passende rechte Socke anziehen wollen.

   Wo und wie können Sie hierbei das Schubfachprinzip anwenden?