Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27./28 April 2004

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 2

Mächtigkeit von Mengen

Zur Erinnerung: Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to M$ existiert. Ist M nicht abzählbar, so wird M *überabzählbar* genannt.

Aufgaben

T 5 (Teilmengen abzählbarer Mengen).

(a) Es sei M eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass dann auch jede Teilmenge $N \subseteq M$ abzählbar ist.

(b) Nun sei M eine Menge, welche eine überabzählbare Teilmenge N besitzt. Zeigen Sie, dass dann auch M überabzählbar ist. (Hinweis: indirekter Beweis!)

T 6 (Abzählbarkeit und injektive Abbildungen nach $\mathbb{N}$)

Zeigen Sie, dass eine Menge M genau dann abzählbar ist, wenn es eine injektive Abbildung $f\colon M \to \mathbb{N}$ gibt.

T 7 (Abbildungen zwischen Produktmengen) Zeigen Sie: Sind $f\colon A \to X$ und $g\colon B \to Y$ surjektive Abbildungen, so ist auch die Abbildung $\phi\colon A \times B \to X \times Y$, $\phi(a, b) := (f(a), g(b))$ surjektiv.

Notation: Man schreibt $f \times g := \phi$ für Abbildungen der vorigen Bauart.

T 8 (Beispiele abzählbarer Mengen).

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar sind:

(a) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

(b) Die Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Skriptverweis).

(c) $M \times N$, wenn M und N abzählbar sind. (Hinweis: Aufgabe **T7**!)

(d) Die Menge $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(e) Die Menge $\mathbb{N}^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(f) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

(g) Die Menge $\mathbb{Q}^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

T 9 (Weitere Konstruktionen abzählbarer Mengen).

(a) Zeigen Sie: Ist M_n eine abzählbare Menge für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ abzählbar. (Hinweis: Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass keine der Mengen M_n leer ist. Finden Sie nun zunächst eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$).

(b) Zeigen Sie, dass für jede abzählbare Menge M auch die Menge $\mathcal{E}(M)$ aller endlichen Teilmengen von M abzählbar ist.

(c) Vergleichen Sie (b) für $M := \mathbb{N}$ mit dem Satz von Cantor-Russel (Satz I.3.16).