Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006
Tutorium 13, Lösungsskizze

Konvexe Funktionen

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $t \in [0,1]$ die folgende Ungleichung gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq \ tf(x) + (1-t)f(y)\,.$$

Aufgaben

T 46 Machen Sie sich klar, was diese Definition für den Graphen von f bedeutet.

[Halten Sie x und y fest und fassen Sie beide Seiten der Ungleichung als Funktionen von t auf.]

Läuft t durch das Intervall $[0,1]$, läuft $x_t := tx + (1-t)y$ von y nach x. Die linke Seite der zu untersuchenden Ungleichung ist der Funktionswert von f an der Stelle x_t, die rechte Seite ist der Wert der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad z \mapsto f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (z - x)$$

an der Stelle x_t, deren Graph die Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ ist (Details sofort!) Die Bedingung bedeutet also, dass zwischen x und y der Graph von f unterhalb (im Sinne von $\leq$) der Sekanten verläuft. Details: Es ist

$$\begin{aligned} g(x_t) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (x_t - x) \ = \ f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (1-t)(y-x) \\ &= f(x) + (f(y) - f(x)) \cdot (1-t) \ = \ tf(x) + (1-t)f(y)\,. \end{aligned}$$

T 47 Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto |x|$$

und

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2$$

konvex sind.

Gegeben $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ ist

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= |tx + (1-t)y| \ \leq \ |tx| + |(1-t)y| \\ &= t|x| + (1-t)|y| \ = \ tf(x) + (1-t)f(y)\,. \end{aligned}$$

Also ist f konvex. Weiter ist

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &= (tx + (1-t)y)^2 \ = \ t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2 \\ &= t^2(x^2 + y^2 - 2xy) + t(2xy - 2y^2) + y^2\,, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} g(tx+(1-t)y) - (\underbrace{tg(x)+(1-t)g(y)}_{tx^2+(1-t)y^2}) &= t^2(x^2+y^2-2xy)+t(2xy-y^2-x^2) \\ &= (t^2-t)(x-y)^2 \;\le\; 0\,, \end{aligned}$$

also wie benötigt $g(tx+(1-t)y) \le tg(x)+(1-t)g(y)$.

T 48 Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Sind $x, y \in I$ mit $x \neq y$, so bezeichne $\mu_f(x,y)$ die Steigung der Sekanten durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$; es ist also

$$\mu_f(x,y) \;=\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,.$$

Zeigen Sie, dass für $x, y, y' \in I$ mit $x \neq y$ und $x \neq y'$ gilt:

$$y \le y' \quad\Rightarrow\quad \mu_f(x,y) \;\le\; \mu_f(x,y')\,.$$

Die Funktion $I \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \mu_f(x,y)$ ist also monoton wachsend.

[Hinweis: Ist etwa $y \le y' < x$, so ist $t := \frac{y'-y}{x-y} \in [0,1]$ und $y' = tx+(1-t)y$.]

---

1. Fall: Es sei $y \le y' < x$. *Dann ist* $t := \frac{y'-y}{x-y} \in [0,1]$ *und* $y' = tx+(1-t)y$ *(wie im Hinweis nahegelegt), somit wegen der Konvexität von* f

$$f(y') \;=\; f(tx+(1-t)y) \;\le\; tf(x)+(1-t)f(y) \;=\; \frac{y'-y}{x-y}f(x)+\frac{x-y'}{x-y}f(y)\,.$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten $f(x)$ *ab und teilen durch* $y'-x$ (<0)*, so erhalten wir*

$$\frac{f(y')-f(x)}{y'-x} \;\ge\; \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \;=\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,.$$

Also gilt wie gewünscht $\mu_f(x,y') \ge \mu_f(x,y)$.

Der letzte Rechenschritt zeigt übrigens, dass μ_f *symmetrisch ist, also*

$$(\forall x, y \in \left]a,b\right[) \quad x \neq y \;\;\Rightarrow\;\; \mu_f(x,y) \;=\; \mu_f(y,x)\,. \tag{1}$$

Diese Beobachtung wird mehrfach von Nutzen sein.

2. Fall: Es sei $x < y \le y'$. *Dann ist* $t := \frac{y-x}{y'-x} \in [0,1]$ *und* $y = ty'+(1-t)x$*, somit wegen der Konvexität von* f

$$f(y) \;=\; f(ty'+(1-t)x) \;\le\; tf(y')+(1-t)f(x) \;=\; \frac{y-x}{y'-x}f(y')+\frac{y'-y}{y'-x}f(x)\,.$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten $f(x)$ *ab und teilen durch* $y-x$ (>0)*, so erhalten wir*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\le\; \frac{f(y')-f(x)}{y'-x}\,.$$

Also gilt wie gewünscht $\mu_f(x,y) \le \mu_f(x,y')$.

3. Fall: Ist $y < x < y'$, so ist $\mu_f(x,y) = \mu_f(y,x) \le \mu_f(y,y') = \mu_f(y',y) \le \mu_f(y',x) = \mu_f(x,y')$, wobei die Symmetrie von μ_f benutzt wurde (siehe (1)) sowie Fall 1 und Fall 2.

T 49 Es sei $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $x \in\ ]a,b[$. Weiter sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $]x,b[$, die gegen x konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Sekantensteigungen

$$z_n \ := \ \mu_f(x,x_n)$$

gegen ein $z \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{y\searrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ = \ z\,.$$

(c) Existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{y\nearrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ ?$$

Falls ja, stimmt dieser notwendig mit der rechtsseitigen Ableitung z überein?

---

*(a) Wähle $y \in\ ]a,x[$. Nach Aufgabe **T48** ist die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und durch $\mu_f(x,y)$ nach unten beschränkt. Nach dem "Satz über monotone Konvergenz" aus dem Skript ist die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also konvergent.*

*(b) Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]x,b[$ mit $y_n \to x$. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Da $y_n \to x$ und $x_{n_0} > x$, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass $y_n < x_{n_0}$ für alle $n \ge n_1$ und somit $\mu_f(x,y_n) \le \mu_f(x,x_{n_0}) = z_{n_0} < z+\varepsilon$, nach **T48**. Es ist jedoch*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mu_f(x,y_n) \ \ge z\,, \tag{2}$$

wie wir gleich sehen werden. Also ist $|\mu_f(x,y_n) - z| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_1$, und somit gilt $\mu_f(x,y_n) \to z$, wie benötigt.

Den Beweis von (2) haben wie noch nachzutragen. Wäre (2) falsch, so gäbe es ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $\mu_f(x,y_m) < z$. Da $y_m > x$ und $x_n \to x$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \le y_m$ und somit

$$z_n = \mu_f(x,x_n) \le \mu_f(x,y_m)\,,$$

*nach **T48**. Da $z \le z_n$, folgt $z \le \mu_f(x,y_m)$, was der Annahme $\mu_f(x,y_m) < z$ widerspricht. Also muss (2) doch wahr sein.*

(c) Analog sieht man, dass der Grenzwert $\lim_{y \nearrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ *existiert. Er stimmt im Allgemeinen allerdings nicht mit* z *überein, wie das Beispiel*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad y \mapsto \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0; \\ -2x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

zeigt. Eine Skizze macht plausibel, dass der Graph dieser Funktion oberhalb aller möglichen Sekanten liegt, die Funktion f *also konvex ist (was man natürlich auch leicht ähnlich wie in* **T47** *nachrechnen kann). An der Stelle* $x = 0$ *sind jedoch die rechtsseitige und die linksseitige Ableitung voneinander verschieden, denn erstere ist* 1*, letztere* 2*.*

T 50 Es sei $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion.

(a) Sei $x \in\ ]a,b[$. Zeigen Sie, dass $\mu_f(x,y) \leq f'(x)$ für alle $y \in\ ]a,x[$ gilt, und $f'(x) \leq \mu_f(x,y)$ für alle $y \in\ ]x,b[$.

(b) Schließen Sie, dass f' monoton wächst.

(a) Sei zunächst $y \in\ ]a,x[$*. Wir wählen eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $]x,b[$ *mit* $x_n \to x$*. Da* $y < x_n$*, ist nach* **T48** *dann* $\mu_f(x,y) \leq \mu_f(x,x_n)$ *und somit wie gewünscht*

$$f'(x) \;=\; \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu_f(x,x_n) \;\geq\; \mu_f(x,y)\,.$$

Sei nun $y \in\ ]x,b]$*. Wir wählen eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $]x,y[$ *mit* $x_n \to x$*. Da* $x_n < y$*, ist nach* **T48** *dann* $\mu_f(x,x_n) \leq \mu_f(x,y)$ *und somit wie gewünscht*

$$f'(x) \;=\; \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu_f(x,x_n) \;\leq\; \mu_f(x,y)\,.$$

(b) Es seien $x,y \in\ ]a,b[$ *mit* $x < y$*. Da* $\mu_f(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \mu_f(y,x)$*, liefern die zwei Ungleichungen aus Teil (a):*

$$f'(x) \;\leq\; \mu_f(x,y) \;=\; \mu_f(y,x) \;\leq\; f'(y)\,.$$

T 51 Sei schließlich $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung monoton wächst. Zeigen Sie, dass dann f konvex ist.

[Hinweis: Mittelwertsatz.]

Seien $x,y \in\ ]a,b[$ *und* $t \in [0,1]$*. Ist* $t = 0$ *oder* $t = 1$*, so gilt* $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ *trivialerweise. Auch für* $x = y$ *ist die Aussage trivial. Sei nun also* $t \in\ ]0,1[$ *und* $x \neq y$*. Wir dürfen annehmen, dass* $x < y$ *(sonst vertauschen wir* x *und* y *und ersetzen* t *durch* $1-t$*). Definieren wir* $x_t := tx + (1-t)y$*, so ist nun*

$x < x_t < y$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in \,]x, x_t[$ sowie ein $\eta \in \,]x_t, y[$ derart, dass

$$\frac{f(x_t) - f(x)}{x_t - x} = f'(\xi) \quad \text{und} \quad \frac{f(y) - f(x_t)}{y - x_t} = f'(\eta)\,.$$

Da $\xi < \eta$, ist per Voraussetzung $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, also

$$\frac{f(x_t) - f(x)}{x_t - x} \leq \frac{f(y) - f(x_t)}{y - x_t}\,.$$

Da $x_t - x = (1-t)(y-x)$ und $y - x_t = t(y-x)$, folgt

$$\frac{f(x_t) - f(x)}{1 - t} \leq \frac{f(y) - f(x_t)}{t}\,.$$

Multiplikation mit $t(1-t)$ und Auflösen nach $f(x_t)$ liefert $f(x_t) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, also

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)\,.$$

Somit ist f konvex.

Nach **T50** und **T51** ist eine differenzierbare Funktion $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ also genau dann konvex, wenn f' monoton wächst.