Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 12, Solution

Folgen von Funktionen- Satz von Dini

T 41 Für $n \in \mathbb{N}$, sei f_n auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f_n(t) = e^{-nt^2}$.

1. Zeigen Sie, dass f_n punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion f konvergiert. Bestimmen Sie f.
2. Zeigen Sie, dass f_n auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig konvergiert, aber die Konvergenz auf allen Intervallen $[a, +\infty[$ oder $]-\infty, -a]$ für $a > 0$ gleichmäßig ist.

Wir haben $f_n(0) = 1$, und für $t \neq 0$ ist $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$. Also konvergiert f_n punktweise gegen die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad t \neq 0, \\ 1 & \textit{falls} \quad t = 0. \end{cases}$$

Da die Funktion f nicht stetig ist, haben wir keine gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}$.

Aus

$$\sup_{t\in[a,+\infty[} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in[a,+\infty[} |e^{-nt^2}| = e^{-na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und

$$\sup_{t\in]-\infty,-a]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in]-\infty,-a]} |e^{-nt^2}| = e^{-na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

folgt die gleichmäßige Konvergenz auf allen Intervallen $[a, +\infty[$ oder $]-\infty, -a]$ für $a > 0$.

T 42 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(t) = \frac{nt^2}{1+nt} \quad \text{falls } t \geq 0, \qquad f_n(t) = \frac{nt^3}{1+nt^2} \quad \text{falls } t \leq 0.$$

Untersuchen Sie die punktweise Konvergenz und die gleichmäßige Konvergenz dieser Folge. (Hinweis: Für die gleichmäßige Konvergenz benutzen Sie $\sup\limits_{t\geq 0} \frac{t}{1+nt^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$).

Sei $t \geq 0$. Dann

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nt^2}{1+nt} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nt^2}{nt} = t.$$

Sei $t \geq 0$. Dann

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nt^3}{1+nt^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nt^3}{nt^2} = t.$$

Also konvergiert die Folge f_n punktweise gegen die Funktion ($f(t) = t$).

Andererseits

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f_n(t) - f(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}^-} |f_n(t) - f(t)| \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{nt^2}{1+nt} - t \right| + \sup_{t\in\mathbb{R}^-} \left| \frac{nt^3}{1+nt^2} - t \right| \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{t}{1+nt} + \sup_{t\in\mathbb{R}^-} \frac{|t|}{1+nt^2} \\ &\leq \frac{1}{n} + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{t}{1+nt^2} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Somit ist die Konvergenz gleichmäßig.

T 43 (Satz von Dini.)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, für welche die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ monoton wachsend sind und die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert.

Zeigen Sie, dass die Konvergenz gleichmäßig ist.

(Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie zeigen, dass eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ existiert und gegen ein Punkt $x \in [0,1]$ konvergiert, aber $f(x_m)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.)

Nehmen wir an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann $\exists\, \varepsilon > 0$, so dass $\forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n_m > m$ und $x_m \in [0,1]$, so dass $|f_{n_m}(x_m) - f(x_m)| \geq \varepsilon$ gilt. So:

$$\text{Für } m = 1\ \exists\, n_1,\ x_1 \in [0,1], \text{ so dass } |f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon \quad \text{gilt.}$$
$$\text{Für } m = n_1\ \exists\, n_2 > n_1,\ x_2 \in [0,1], \text{ so dass } |f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| \geq \varepsilon \quad \text{gilt.}$$
$$\vdots$$
$$\text{Für } n_{m-1}\ \exists\, n_m > n_{m-1},\ x_m \in [0,1], \text{ so dass } |f_{n_m}(x_m) - f(x_m)| \geq \varepsilon \quad \text{gilt.}$$

Also haben wir jetzt eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ und eine Teilfolge $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Dann

$$x_{m_j} \to x \in [0,1].$$

Zeigen wir, dass $f(x_{m_j})_j$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.

Da die Folge punktweise konvergiert, haben wir für $j \geq j_0$ $|f_{n_{m_j}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Insbesondere

$$|f_{n_{m_{j_0}}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nach der Annahme haben wir

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \ |f_{n_{m_j}}(x_{m_j}) - f(x_{m_j})| \geq \varepsilon.$$

Da die Folge $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$, $(y \in [0,1])$ monoton wachsend ist und gegen f punktweise konvergiert, erhalten wir für $j \geq j_0$

$$f(x_{m_j}) \geq f_{n_{m_j}}(x_{m_j}) \geq f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}).$$

Somit

$$|f_{n_{m_{j_0}}}(x) - f(x_{m_j})| \geq \varepsilon.$$

Ferner gilt

$$\varepsilon \leq |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{mj}) - f(x_{m_j})| \leq |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f(x)| + |f(x_{m_j}) - f(x)| \quad \forall\, j \geq j_0,$$

also haben wir

$$|f(x_{m_j}) - f(x)| \geq \varepsilon - |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f(x)| \quad \forall\, j \geq j_0.$$

Andererseits

$$|f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f(x)| \leq |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - |f_{n_{m_{j_0}}}(x)| + |f_{n_{m_{j_0}}}(x) - f(x)|.$$

Da die Funktion $f_{n_{m_{j_0}}}$ stetig ist und die Folge $(x_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, existiert ein $j_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - |f_{n_{m_{j_0}}}(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall\, j \geq j_1.$$

Dann gilt für $j \geq j_1$

$$|f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f(x)| \leq |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - |f_{n_{m_{j_0}}}(x)| + |f_{n_{m_{j_0}}}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit

$$|f(x_{m_j}) - f(x)| \geq \varepsilon - |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, j \geq \max(j_0, j_1).$$

Das zeigt, dass $f(x_{m_j})$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert. Das widerspricht der Aussage: f ist keine stetige Funktion.

T 44 (**Anwendung.**)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Folge P_n durch $P_0(t) = 0$ für $t \in [0,1]$ und

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2)$$

für $t \in [0,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion P_n ein Polynom ist und für $t \in [0,1]$ die folgende Ungleichung gilt:

$$0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}.$$

(b) Zeigen Sie, dass P_n eine wachsende Folge ist, und gegen eine Funktion f punktweise konvergiert. Bestimmen Sie f.

(c) Zeigen Sie, dass P_n auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert.

(a) Mittels Induktion ist es einfach zu sehen, dass jede Funktion P_n ein Polynom ist. Beweisen wir jetzt die Ungleichung

$$0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}.$$

Für $n = 0$, $0 \leq P_0(t) = 0 \leq \sqrt{t}$. Annahme: $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$. Sei $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) - \sqrt{t} &= P_n(t) - \sqrt{t} + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \\ &= (P_n(t) - \sqrt{t})(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + P_n(t)) \end{aligned}$$

Nach der Induktionsannahme gilt: Für $t \in [0,1]$, $P_n(t) \leq \sqrt{t} \leq 1$. So erhalten wir

$$(P_n(t) - \sqrt{t})(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + P_n(t)) \geq 0$$

und $P_{n+1}(t) - \sqrt{t} \geq 0$.

(b) Nach der Definition der Folge P_n haben wir, dass $P_n(t)$ eine wachsende Folge für jedes $t \in [0,1]$ ist. Jetzt liefert Teil (a)

$$0 \leq P_0(t) \leq P_1(t) \leq \cdots \leq P_n(t) \leq \sqrt{t} \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Dann ist $P(t)$ eine wachsende beschränkte Folge. Also konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen eine Funktion P auf $[0,1]$. Für jedes $t \in [0,1]$ gilt dann

$$P(t) = P(t) + \frac{1}{2}(t - P(t)^2),$$

also $P(t) = \sqrt{t}$.

(c) Wenden Sie den Satz von Dini an.

T 45 Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Funktion $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+nx}.$$

Untersuchen Sie die punktweise Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Liegt gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$ vor ?

Wir haben $f_n(0) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $x \neq 0$ gilt

$$|f_n(x)| = \left|\frac{e^{-x}}{1+nx}\right| \leq \frac{1}{1+nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad x \neq 0, \\ 1 & \textit{falls} \quad x = 0. \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind auf $[0,1]$ stetig und konvergieren punktweise gegen eine nicht stetige Funktion f. Daher liegt keine gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$ vor. Sonst wäre f stetig.