Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006
Tutorium 11, Lösungsskizze

Fixpunktsätze, Lipschitz-Stetigkeit und Kontraktionen

In diesem Tutorium beschäftigen wir uns mit verschiedenen Fixpunktsätzen. Unter einem Fixpunktsatz versteht man einen Satz, der Voraussetzungen angibt, die dafür sorgen, dass eine Funktion $f\colon X \to X$ (mindestens) einen Fixpunkt besitzt, also ein $p \in X$ mit $f(p) = p$. Als Hilfsmittel treten gewisse Arten von Funktionen auf, die besonders schöne Stetigkeitseigenschaften haben (Lipschitz-stetige Funktionen und Kontraktionen).

Aufgaben

T 38 (Spezialfall des Brouwerschen Fixpunktsatzes).

Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to [a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ mindestens einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: Gesucht sind also Nullstellen der stetigen Funktion $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$. Überlegen Sie sich zunächst, dass $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$ sein muss.

Da $f(b) \in [a, b]$ per Annahme, ist $f(b) \leq b$ und somit $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Analog sieht man, dass $g(a) \geq 0$ sein muss.

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz IV.1.15) nimmt g alle Werte zwischen $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$ an, insbesondere also auch den Wert 0. Es gibt also ein $p \in [a, b]$ mit $0 = g(p) = f(p) - p$ und somit $f(p) = p$.

T 39 (Lipschitz-Stetigkeit). Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \geq 0$ gibt derart, dass

$$(\forall x, y \in X) \quad d_Y(f(x), f(y)) \;\leq\; L \cdot d_X(x, y)\,.$$

Diese Eigenschaft nennt man auch eine (globale) Lipschitzbedingung. Kann man $L < 1$ wählen, so nennt man f eine *Kontraktion.*

(a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

(b) Welche der folgenden Funktionen ist Lipschitz-stetig?

$$\begin{array}{rcccrcc} f\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} & f(x) & := & x \\ g\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} & g(x) & := & x^2 \\ h\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & h(x) & := & x^2 \\ w\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} & w(x) & := & \sqrt{x} \end{array}$$

(c) Sind f bzw. g Kontraktionen? Wie steht es mit $s\colon [0, \frac{1}{3}] \to \mathbb{R}$, $s(x) := x^2$?

(a) Wir dürfen annehmen, dass $L > 0$ ist (nachdem wir L notfalls vergrößern). Sei $p \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Ist dann $x \in X$ mit $d_X(x,p) < \delta$, so folgt

$$d_Y(f(x), f(p)) \;\leq\; L \cdot d_X(x,p) \;<\; L \cdot \delta \;=\; \varepsilon\,.$$

Somit ist f stetig in p.

(b) Die Funktion f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$, da

$$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |f(x) - f(y)| = |x - y| \leq 1 \cdot |x - y|\,.$$

Die Funktion g ist Lipschitz-stetig mit $L = 2$, da

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| \;&=\; |x^2 - y^2| \;=\; |(x+y)(x-y)| \;=\; |x+y| \cdot |x-y| \\ &\leq\; (|x| + |y|) \cdot |x - y| \;\leq\; 2|x-y| \end{aligned} \tag{1}$$

für alle $x, y \in [0,1]$.

Die Funktion h ist nicht Lipschitz-stetig, denn wäre

$$|h(x) - h(y)| = |x+y| \cdot |x-y| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so wäre für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$

$$|x + y| \;\leq\; L\,. \tag{2}$$

Wählen wir $x := L + 1$ und $y := 0$, so ist aber $|x + y| = L + 1 > L$, Widerspruch.

Die Funktion w ist nicht Lipschitz-stetig. Es gilt nämlich

$$|w(x) - w(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{|\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

und somit für $x \neq y$

$$\frac{|w(y) - w(y)|}{|x - y|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung können wir für kleine x und y größer machen als jede vorgegebene Schranke L.

(c) Da $|f(1) - f(0)| = 1 = |1 - 0|$ und $|g(1) - g(0)| = 1 = |1 - 0|$, sind f und g keine Kontraktionen. Jedoch gilt nach (1)

$$|s(x) - s(y)| \leq (|x| + |y|) \cdot |x - y| \leq \frac{2}{3}\,|x - y|$$

für alle $x, y \in [0, \frac{1}{3}]$. Also ist s eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\frac{2}{3}$.

T 40 (Banachscher Fixpunktsatz).

In dieser Aufgabe beweisen wir einen extrem wichtigen Fixpunktsatz:

Banachscher Fixpunktsatz. *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine Kontraktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.*

Zum Beweis gehen wir in Schritten vor. Zunächst wählen wir ein $L \in [0, 1[$ derart, dass $d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kontraktion f höchstens einen Fixpunkt haben kann (Widerspruchsbeweis!)

Um die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen, wählen wir irgendeinen Punkt $x_0 \in X$ und definieren rekursiv eine Folge in X via $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir prüfen nun nach, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen einen Fixpunkt von f konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$d(x_{n+1}, x_n) \;\le\; L^n \, d(x_1, x_0)\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.

(d) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $p \in X$ konvergiert und dieses p ein Fixpunkt von f ist.

Damit ist der Beweis erledigt. In Anwendungen genügt es häufig, den Fixpunkt p näherungsweise zu kennen. Man begnügt sich dann mit einem der oben rekursiv berechneten Punkte x_n, für genügend großes n. Aus dem Beweis lässt sich eine nützliche Abschätzung für den Fehler der Näherung ableiten:

(e) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$d(p, x_n) \;\le\; \frac{L^n}{1-L}\, d(x_1, x_0)\,.$$

(f) Finden Sie eine Kontraktionskonstante L für

$$f\colon [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \to [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\,, \quad f(x) \;:=\; x^3 - \tfrac{1}{4}\,;$$

benutzen Sie hierbei, dass $x^3 - y^3 = (x-y)\cdot(x^2 + xy + y^2)$. Um den Fixpunkt p von f näherungsweise zu bestimmen, setzen wir $x_0 := 0$, $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wie groß müssen Sie n wählen, damit Sie sicher sein können, dass

$$|p - x_n| \;<\; \frac{1}{100}\,?$$

(a) Wären $p, q \in X$ zwei verschiedene Fixpunkte von f, so wäre $d(p,q) > 0$. Somit wäre

$$d(p,q) \;=\; d(f(p), f(q)) \;\le\; L\, d(p,q)\,;$$

da Gleicheitszeichen gilt hierbei, da $f(p) = p$ und $f(q) = q$; die Ungleichung gilt, da f eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante L ist. Division durch $d(x,y)$ führt auf den Widerspruch $1 \le L$.

(b) Beweis per vollständiger Induktion. Für $n = 0$ gilt

$$d(x_1, x_0) = 1 \cdot d(x_1, x_0) \le 1 \cdot d(x_1, x_0) = L^0 \cdot d(x_1, x_0)\,,$$

wie behauptet. Wissen wir bereits, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \;\le\; L^n\, d(x_1, x_0)$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \le L\cdot d(x_{n+1}, x_n) \le L\cdot L^n d(x_1, x_0) = L^{n+1} d(x_1, x_0),$$

was den Beweis beendet.

(c) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \ge m$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \\ &\le \sum_{k=m}^{n-1} L^k\, d(x_1, x_0) \;=\; L^m \sum_{k=0}^{n-m-1} L^k\, d(x_1, x_0) \\ &= L^m \frac{1 - L^{n-m}}{1 - L}\, d(x_1, x_0) \;\le\; \frac{L^m}{1-L}\, d(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zunächst die Dreicksungleichung (mehrmals) angewandt, anschließend Aufgabenteil (b) und dann die geometrische Summenformel.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\frac{L^m}{1-L}\, d(x_1, x_0) \to 0$ für $m \to \infty$, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{L^m}{1-L}\, d(x_1, x_0) < \varepsilon$ für alle $m \ge N$. Nach den vorigen Abschätzungen gilt dann

$$(\forall n, m \ge N) \quad d(x_n, x_m) \;<\; \varepsilon\,.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(d) Da der metrische Raum X per Voraussetzung vollständig ist, konvergiert die Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, etwa gegen $p \in X$. Per Konstruktion gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad x_{n+1} \;=\; f(x_n)\,.$$

Für $n \to \infty$ geht die linke Seite gegen $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p$. Da f stetig ist, geht die rechte Seite gegen

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \;=\; f(p)$$

(siehe Satz IV.1.3 (3)). Also ist $p = f(p)$, d.h. p ist tatsächlich ein Fixpunkt von f.

(e) Ist $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, so gilt für alle $n \ge m$ nach der Lösung zu (c):

$$d(x_n, x_m) \;\le\; \frac{L^m}{1-L}\, d(x_1, x_0)\,. \tag{3}$$

Wir halten m fest. Da die Funktion $d(\bullet, x_m)\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, x_m)$ nach Beispiel IV.1.2 stetig ist, liefert Grenzübergang $n \to \infty$ in (3) unter Benutzung von Satz III.2.13 (6):

$$d(p, x_m) \;=\; d\Big(\lim_{n\to\infty} x_n,\; x_m\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \;\le\; \frac{L^m}{1-L}\, d(x_1, x_0)\,.$$

Dies war zu zeigen.

(f) Für alle $x, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *gilt*

$$|f(x)-f(y)| = |x^3-y^3| = |x-y|\cdot|x^2+xy+y^2| \leq |x-y|\cdot(|x|^2+|x|\cdot|y|+|y|^2) \leq \frac{3}{4}\cdot|x-y|\,.$$

Also ist f *eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante* $L = \frac{3}{4}$.

Es ist $x_0 := 0$, $x_1 := f(x_0) = f(0) = -\frac{1}{4}$ *und somit* $|x_1 - x_0| = |-\frac{1}{4} - 0| = \frac{1}{4}$. *Nach der Formel aus (e) gilt für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*:*

$$|p - x_n| \;\leq\; \frac{L^n}{1-L}\,|x_1 - x_0| \;\leq\; \frac{(\frac{3}{4})^n}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} \;=\; (\tfrac{3}{4})^n\,.$$

Es ist $(\frac{3}{4})^{17} = 0,0075... < 0.01$ *(und somit* $(\frac{3}{4})^n < 0.01$ *für alle* $n \geq 17$*). Ab* x_{17} *hat man also sicher die gewünschte Genauigkeit.*