Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 10, Solution

Wachstum und Exponentialfunktion

T 33 (Wachstum einer Bakterienkolonie)

Wachstum oder Abnahme einer zeitabhängigen Größe $u(t)$ werden häufig modelliert, indem man annimmt, dass die Zu-bzw. Abnahme pro Zeiteinheit zum augenblicklichen Niveau proportional ist. Wir wollen sehen, wie der Wert $u(t_0+h)$ am Ende eines Zeitintervalls $[t_0, t_0+h]$ vom Anfangswert $u(t_0)$ abhängt. Wenn das Intervall sehr kurz ist, wird die Zu-bzw. Abnahme pro Zeiteinheit fast konstant bleiben, so dass näherungsweise

$$\frac{u(t_0+h)-u(t_0)}{h} \approx au(t_0) \tag{1}$$

gilt, wobei $a \in \mathbb{R}$ die Proportionalitätskonstante ist.

In Folgenden werden wir sehen, dass die Gleichung

$$u(t) = u(t_0)e^{at}$$

das Wachstum einer Population modelliert.

1. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jede $\varepsilon > 0$ ein $n_0 > 0$ existiert so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\left| \frac{e^{ah_n}-1}{h_n} - a \right| \leq \epsilon$$

   (**Hin:** Benutzen Sie $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}$ und die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^{n-2}}{n!}$, $\alpha \geq 0$).
2. Zeigen Sie, dass $u(t) = u(t_0)e^{at}$ die Gleichung (1) erfüllt.

Lösung:

1. *Sei $\varepsilon > 0$. Von $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}$ erhält man*

$$\frac{e^{ah_n}-1}{h_n} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^p h_n^{p-1}}{p!},$$

   so ist

$$\left| \frac{e^{ah_n}-1}{h_n} - a \right| \leq \sum_{p=2}^{\infty} \frac{|a|^p |h_n|^{p-1}}{p!}. \tag{2}$$

   Sei $0 < \zeta < 1$. Da die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, existiert es ein $n_0 > 0$, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|h_n| \leq \zeta$. Wähle $n \geq n_0$, aus der Ungleichung (2) bekommt man

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{ah_n}-1}{h_n} - a \right| &\leq \zeta \cdot \sum_{p=2}^{\infty} \frac{|a|^p \zeta^{p-2}}{p!} \\ &\leq \zeta \cdot \sum_{p=2}^{\infty} \frac{|a|^p}{p!} \quad \forall\, n \geq n_0. \end{aligned}$$

   Da die Reihe $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{|a|^p}{p!}$ konvergiert, schreiben wir $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{|a|^p \zeta^{p-2}}{p!} = M$, wobei M eine positive Konstant ist. So erhälten wir

$$\left| \frac{e^{ah_n}-1}{h_n} - a \right| \leq \zeta \cdot M \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{3}$$

   Die Ungleichung (3) ist gültig für alle $\zeta < 1$. Jetzt wähle $\zeta \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Damit folgt bereits der Beweis.

2.

$$
\begin{aligned}
\frac{u(t_0+h)-u(t_0)}{h} &= \frac{u(t_0)e^{a(t_0+h)}-u(t_0)e^{at_0}}{h} \\
&= \frac{u(t_0)e^{at_0}e^{ah}-u(t_0)e^{at_0}}{h} \\
&= u(t_0)e^{at_0}\cdot\frac{e^{ah}-1}{h} \\
&= u(t_0)\cdot\frac{e^{ah}-1}{h}
\end{aligned}
$$

Aus dem Teil 1 der Aufgabe haben wir $\frac{e^{ah}-1}{h} \approx a$. *Somit* $u(t) = u(t_0)e^{at}$ *die Gleichung* (1) *erfüllt.*

T 34 Was bedeutet das Vorzeichen von a?

Lösung: *Für* $a \geq$ *(bzw.* $a \leq 0$*), Die Population unterliegt einem exponentiellen Zunahmeprozeß (bzw. Abnahmeprozeß).*

T 35 Eine Bakterienpopulation der Anfangsgröße $u_0 = 10^4$ habe eine tägliche Wachstumsrate von 10% (unter günstigen Bedingungen weisen Läusepopulationen ein ähnlich rasches Wachstum auf). Wieviel Bakterien sind nach 10 bzw. nach 20 Tagen vorhanden?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
u_{10} &= u_0\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 10^4\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \\
u_{20} &= u_0\left(1+\frac{1}{10}\right)^{20} = 10^4\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)^{20}
\end{aligned}
$$

T 36 Eine exponentiell wachsende Bakterienpopulation der Anfangsgröße $u_0 = 10^4$ habe nach 10 Tagen die Größe $u(10) = 25\cdot 10^3$. Wie groß ist sie nach 30 Tagen?

Lösung: *Sei* α *die tägliche Wachstumsrate dieser Bakterienpopulation. Man Berechnet* α *aus der Gleichung* $u(10) = u_0\cdot(1+\alpha)^{10} = 25\cdot 10^3$. *Somit* $u(30) = u_0\cdot(1+\alpha)^{30}$.

T 37 Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass für $x \geq 0$ die Folge $w_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ monoton wächst.

1. Zeigen Sie mit Induktion die Eigenschaft (**P**): $(1+u)^n \geq 1+nu$ für jede reelle Zahl $u > -1$.
2. Zeigen Sie, dass $1+\frac{x}{n+1} = 1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n(n+1)}$. Beweisen Sie, dass für $|x| < n$ gilt

$$
w_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}.
$$

3. Verwenden Sie die Eigenschaft (**P**), zum zeigen, dass

$$
w_{n+1}(x) \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n+x}\right) = w_n(x).
$$

Lösung:

1. *Für* $n = 0$ *(**P**) ist erfüllt. Annahme* $(1+u)^n \geq 1 + nu$ *für jede reelle Zahl* $u > -1$. *Sei* $u > -1$

$$(1+u)^{n+1} = (1+u)(1+u)^n \geq (1+u)(1+nu) = 1 + u + nu + nu^2 \geq 1 + (n+1)u.$$

2.
$$1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)} = 1 + \frac{n^2x + nx - nx}{n(n^2+n)} = 1 + \frac{x}{n+1},$$
$$\begin{aligned} w_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}\right)^{n+1} \\ &= \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{x}{n(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

   Da $-\frac{x}{n(n+1)(n+x)} \geq -1$, *folgt es aus der Eigenschaft (**P**)*

$$\left(1 - \frac{x}{n(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{x}{n+x}\right).$$

   Somit die Ungleichung

$$w_{n+1}(x) \geq (1 + \frac{x}{n})^{n+1}(1 - \frac{x}{n+x}) = w_n(x)$$

   erfüllt ist.