Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006
Tutorium 9, Lösungsskizze

Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen

Wir haben die reellen Zahlen axiomatisch definiert (als einen vollständig angeordenten Körper), wissen aber noch nicht, ob solche Körper überhaupt existieren. In diesem Tutorium holen wir dies nach und konstruieren explizit die reellen Zahlen aus den rationalen.

Hierzu betrachten wir auf dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ die Abstandsfunktion

$$d\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \quad (x, y) \mapsto |x - y|\,.$$

Da wir die reellen Zahlen noch nicht zur Verfügung haben, haben wir hier statt $\mathbb{R}$ (wie üblich) $\mathbb{Q}$ als Wertebereich genommen. Dies stört aber nicht, und wir können trotzdem von konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ reden. Die reellen Zahlen werden schließlich gewisse Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ sein.

Hinweis: Die Konstruktion ist recht umfangreich, und wir erwarten nicht, dass Sie alle Schritte durchführen! Insbesondere die mit Sternchen versehenen Aufgabenteile sollten Sie zwar durchlesen, aber nicht bearbeiten.

Aufgaben

T 30 (Vorüberlegungen zu Cauchy-Folgen).

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(d) Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so gibt es eine rationale Zahl $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass entweder

$$(\forall n \geq n_0) \quad x_n \geq \varepsilon$$

oder $(\forall n \geq n_0)\;\; x_n \leq -\varepsilon$.

(e) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}^\times$ gilt: $a^{-1} - b^{-1} = a^{-1}(b - a)b^{-1}$.

(f) Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(x_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(a) Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N_1$ und $|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N_2$. Setze $N := \max\{N_1, N_2\}$; dann gilt

$$(\forall n, m \geq N) \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ und }\; |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit für alle $n, m \geq N$:

$$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| \;\leq\; |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon\,.$$

Also ist $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge.*

(b) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass* $|x_n - x_m| < 1$ *für alle* $n, m \geq N$. *Setze* $s := \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\} + 1$. *Dann gilt* $|x_n| \leq s$ *für* $n \in \{1, \ldots, N\}$ *sowie für* $n \geq N$*:*

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| \leq 1 + |x_N| \leq s\,.$$

Also ist $|x_n| \leq s$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und somit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt.*

(c) Nach (b) sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt, es gibt also ein* $s \in]0, \infty[$ *derart, dass*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x_n| < s \quad \text{und} \quad |y_n| < s\,.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass*

$$(\forall n, m \geq N) \quad |x_n - x_m| \;<\; \frac{\varepsilon}{2s} \quad \text{und} \quad |y_n - y_m| \;<\; \frac{\varepsilon}{2s}\,.$$

Dann gilt für alle $n, m \geq N$*:*

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| \;&=\; |x_n y_n - x_n y_m + x_n y_m - x_m y_m| \;\leq\; |x_n y_n - x_n y_m| + |x_n y_m - x_m y_m| \\ &=\; |x_n| \cdot |y_n - y_m| + |y_m| \cdot |x_n - x_m| \;\leq\; s \cdot |y_n - y_m| + s \cdot |x_n - x_m| \\ &<\; s \cdot \frac{\varepsilon}{2s} + s \cdot \frac{\varepsilon}{2s} \;=\; \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Also ist $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge.*

(d) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine Nullfolge, so konvergiert* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht gegen* 0 *und somit existiert ein* $\varepsilon' > 0$ *derart, dass*

$$(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0) \quad |x_n - 0| \geq \varepsilon'\,. \tag{1}$$

Setze $\varepsilon := \frac{\varepsilon'}{2}$. *Da* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge ist, existiert ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *derart, dass* $|x_n - x_m| < \varepsilon$ *für alle* $n, m \geq n_0$. *Nach (1) existiert ein* $n \geq n_0$ *derart, dass* $|x_n| \geq \varepsilon' = 2\varepsilon$. *Sei etwa* $x_n \geq 2\varepsilon$ *(den Fall* $x_n \leq -2\varepsilon$ *behandelt man analog). Für alle* $m \geq n_0$ *ist wegen* $x_n - x_m \leq |x_n - x_m| < \varepsilon$ *dann wie erwünscht*

$$x_m \;=\; x_n - (x_n - x_m) \;\geq\; x_n - |x_n - x_m| \;>\; x_n - \varepsilon \;\geq\; 2\varepsilon - \varepsilon \;=\; \varepsilon\,.$$

(e) Man multipliziert einfach aus und benutzt, dass $a^{-1}a = 1 = bb^{-1}$.

(f) Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine Nullfolge ist, gibt es als Konsequenz aus (d) ein* $\varepsilon > 0$ *und ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *derart, dass*

$$(\forall n \geq n_0) \quad |x_n| \;\geq\; \varepsilon\,.$$

setze $s := \max\{|x_1|^{-1}, \cdots, |x_{n_0}^{-1}|, \varepsilon^{-1}\}$. *Dann gilt*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x_n^{-1}| \;\leq\; s\,.$$

Gegeben $\varepsilon' > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass*

$$(\forall n, m \geq N) \quad |x_n - x_m| \;<\; \frac{\varepsilon'}{s^2}\,.$$

Dann gilt für alle $n, m \geq N$*:*

$$|x_n^{-1} - x_m^{-1}| = |x_n^{-1}(x_m - x_n)x_m^{-1}| = |x_n^{-1}| \cdot |x_m - x_n| \cdot |x_m^{-1}| \;<\; s \cdot \frac{\varepsilon'}{s^2} \cdot s \;=\; \varepsilon\,.$$

Also ist $(x_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge.*

T 31 (Die reellen Zahlen als Menge und Körper). Es sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Cauchy-Folgen rationaler Zahlen.

(a) Wir sagen, zwei Cauchy-Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{C}$ seien *äquivalent* und schreiben $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $x'_n - x_n \to 0$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}$ ist. Wir können somit definieren:

$$\mathbb{R} \;:=\; \mathcal{C}/\!\sim\;.$$

Im Folgenden meint $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ die Äquivalenzklasse von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$.

(b) Zeigen Sie, dass für $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ die "Summe"

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \;:=\; [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

und das "Produkt"

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \;:=\; [(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

wohldefiniert ist, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(d)* Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \cdot)$ ein kommutatives Monoid ist und das Distributivgesetz für Addition und Multiplikation gilt.

(e) Zeigen Sie, dass jedes von 0 verschiedene Element $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ in $\mathbb{R}$ invertierbar ist. Also ist $\mathbb{R}$ ein Körper.

(a) Reflexivität: Da $x_n - x_n = 0 \to 0$, gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Symmetrie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt $x'_n - x_n \to 0$ und somit auch $x_n - x'_n \to 0$, weswegen auch $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Transitivität: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt $x'_n - x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $x''_n - x'_n \to 0$, folglich auch $x''_n - x_n = (x''_n - x'_n) + (x'_n - x_n) \to 0$. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Zunächst ist nach Aufgabe **T30** *(a) und (c) sowohl $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, womit $[(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ und $[(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ sinnvolle Ausdrücke sind. Zum Nachprüfen der Wohldefiniertheit sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen*

$$(x'_n + y'_n) - (x_n + y_n) \;=\; (x'_n - x_n) + (y'_n - y_n) \;\to\; 0$$

ist dann $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n + y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$; die Addition ist also wohldefiniert. Zum Nachprüfen der Wohldefiniertheit der Multiplikation nutzen wir die in **T30** *(b) bewiesene Beschränktheit: Es gibt ein $s \in\,]0, \infty[$ derart, dass*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x'_n| < s \;\text{ und }\; |y_n| < s\,.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass*

$$(\forall n \geq N) \quad |y_n' - y_n| < \frac{\varepsilon}{2s} \text{ und } |x_n' - x_n| < \frac{\varepsilon}{2s}\,.$$

Für alle $n \geq N$ *gilt dann*

$$\begin{aligned} |x_n'y_n' - x_ny_n| &= |x_n'(y_n' - y_n) + (x_n' - x_n)y_n| \leq |x_n'| \cdot |y_n' - y_n| + |y_n| \cdot |x_n' - x_n| \\ &< s \cdot \frac{\varepsilon}{2s} + s \cdot \frac{\varepsilon}{2s} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Also gilt $x_n'y_n' - x_ny_n \to 0$ *und somit* $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n'y_n')_{n\in\mathbb{N}}$*, wie benötigt.*

(c) Assoziativgesetz: Es ist

$$\begin{aligned} ([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) + [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [((x_n + y_n) + z_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n + (y_n + z_n))_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + ([(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) + [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}])\,. \end{aligned}$$

Kommutativität:

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y_n + x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\,.$$

$[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ *ist Neutralelement:*

$$[(0)_{n\in\mathbb{N}}] + [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(0 + x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\,.$$

$[(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ *ist additives Inverses zu* $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$*:*

$$[(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(-x_n + x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(0)_{n\in\mathbb{N}}]\,.$$

(d) Assoziativgesetz: Es ist

$$\begin{aligned} ([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) \cdot [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [((x_n \cdot y_n) \cdot z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [(x_n \cdot (y_n \cdot z_n))_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n \cdot z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot ([(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) \cdot [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}])\,. \end{aligned}$$

Kommutativität:

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y_n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\,.$$

$[(1)_{n\in\mathbb{N}}]$ *ist Neutralelement:*

$$[(1)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(1 \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\,.$$

Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} ([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) \cdot [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [((x_n + y_n) \cdot z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [(x_n \cdot z_n + y_n \cdot z_n))_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [(x_n \cdot z_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n \cdot z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}]\,. \end{aligned}$$

(e) Ist $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$, so ist konvergiert $x_n = x_n - 0$ nicht gegen 0, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge. Nach **T30** *(d) gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$(\forall n \geq n_0) \quad |x_n| \geq \varepsilon$$

und somit $x_n \neq 0$. Wir setzen $y_n := 1$ für $n \in \{1, \ldots, n_0 - 1\}$, $y_n := x_n$ für $n \geq n_0$. Dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Der Vorteil ist, dass zudem $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; die Bedingungen von Aufgabe **T30** *(f) sind somit erfüllt und wir schließen, dass auch $(y_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen ist. Wegen*

$$[(y_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y_n^{-1}y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$$

ist $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]^{-1}$.

T 32 (Die Anordnung auf $\mathbb{R}$) Es sei $\mathbb{R}_+$ die Menge alle $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ derart, dass eine positive rationale Zahl ε existiert und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Man überlegt sich leicht, dass die Menge $\mathbb{R}_+$ wohldefiniert ist (unabhängig von der jeweiligen Wahl des Repräsentanten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ein angeordneter Körper ist.

Wir betrachten nun die Abbildung $\lambda\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $\lambda(x) := [(x, x, x, \ldots)]$.

(b) Zeigen Sie, dass λ injektiv ist.

Wir können also $x \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ identifizieren. Dies ändert nichts an der gegebenen Addition, Multiplikation und Ordnung auf $\mathbb{Q}$, denn man sieht leicht, dass $\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y)$, $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$ und $(x \leq y \Leftrightarrow \lambda(x) \leq \lambda(y))$. Insbesondere können wir nun $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ interpretieren.

(c)* Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ein archimedisch angeordneter Körper ist.

Um einzusehen, dass der angeordnete Körper $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ vollständig ist, sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge. Dann gibt es ein $s_0 \in \mathbb{Z}$ mit $s_0 \geq A$; wir wählen s_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Ist $s_0 - \frac{1}{2} \geq A$, so setzen wir $s_1 := s_0 - \frac{1}{2}$; andernfalls setzen wir $s_1 := s_0$. Rekursiv setzen wir $s_n := s_{n-1} - 2^{-n}$ falls $s_{n-1} - 2^{-n} \geq A$, andernfalls $s_n := s_{n-1}$.

(d) Zeigen Sie, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ ist.

(e)* Zeigen Sie, dass $[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \sup A$.

(a) Bedingung (O1): Fall 1: Ist $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und somit weder $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ in $\mathbb{R}_+$ noch $-[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ in $\mathbb{R}_+$. Andernfalls gäbe es nämlich ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ bzw. $-x_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Somit gälte $|x_n| \geq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und somit wäre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, Widerspruch.

Sei nun $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und somit existiert *nach Aufgabe* **T30** *(d) eine rationale Zahl $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass entweder (Fall 1:)*

$$(\forall n \geq n_0) \quad x_n \ \geq \ \varepsilon$$

oder (Fall 2) $x_n \leq -\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. In Fall 1 ist $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$; in Fall 2 ist $-[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$. Es ist klar, dass nicht gleichzeitig $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ und $-[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ in $\mathbb{R}_+$ sein kann.

(O2) und (O3): Sind $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$, so existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \geq \varepsilon_1$ für alle $n \geq n_1$ und $y_n \geq \varepsilon_1$ für alle $n \geq n_2$. Setze $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ und $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 > 0$, und für alle $n \geq n_0$ gilt

$$x_n + y_n \ \geq \ \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

sowie

$$x_n \cdot y_n \ \geq \ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \,.$$

Also ist $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ und $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$.

(b) Ist $x \neq y$, so ist $(y - x)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und somit $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht zu $(y)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent, folglich $\lambda(x) = [(x)_{n\in\mathbb{N}}] \neq [(y)_{n\in\mathbb{N}}] = \lambda(y)$.

(c) Gegeben $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Aufgabe **T30** *(b) beschränkt, es existiert also eine rationale Zahl $q = \frac{z}{N}$ derart, dass $x_n \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wobei $z \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}$). Wir dürfen annehmen, dass $q \geq 0$ und somit $z \geq 0$ ist; dann ist $z = N \cdot q \geq q$, also auch $x_n \leq z$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lambda(z+1) > [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, also $\lambda(z+1) - [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$, da $z + 1 - x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(d) Da $|s_{n+1} - s_n| \leq 2^{-(n+1)} < 2^{-n}$, ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge nach Aufgabe **G25** *auf Übungsblatt 8.*

(e) Um zu sehen, dass $[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \sup A$, prüfen wir die Bedingungen von Lemma II.2.14 nach.

$[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist eine obere Schranke für *A: Sonst gäbe es nämlich ein $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in A$ derart, dass $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Somit gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$(\forall n \geq n_0) \quad a_n - s_n \ \geq \ \varepsilon \,. \tag{2}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, dürfen wir nach Vergrößern von n_0 annehmen, dass

$$(\forall n, m \geq n_0) \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergäbe sich nun insbesondere, dass für alle $n \geq n_0$

$$a_n - s_{n_0} \ = \ a_n - a_{n_0} + a_{n_0} - s_{n_0} \ \geq \ -\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \ = \ \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Somit wäre $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] > s_{n_0}$, im Widerspruch dazu, dass per Konstruktion $s_{n_0} \geq A$. Also ist doch $[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ eine obere Schranke für A.

Hilfsbehauptung 1. *Wir zeigen nun per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$, dass ein $a \in A$ existiert mit $a > s_n - 2^{-n}$. Für $n = 0$ ist $s_0 - 1$ nicht $\geq A$ (per Konstruktion),* *somit gibt es ein $a \in A$ mit $s_0 - 1 < a$. Nun sei $n \in \mathbb{N}$ und es gebe ein $a \in A$ mit $a > s_{n-1} - 2^{-(n-1)}$. Gemäß der Konstruktion von s_n sind zwei Fälle zu unterscheiden: Ist $s_{n-1} - 2^{-n} \geq A$, so ist $s_n = s_{n-1} - 2^{-n}$. Dann ist*

$$a > s_{n-1} - 2^{-(n-1)} = s_{n-1} - 2^{-n} - 2^{-n} = s_n - 2^{-n}.$$

Im anderen Fall ist nicht $s_{n-1} - 2^{-n} \geq A$, es existiert also ein $b \in A$ derart, dass $b > s_{n-1} - 2^{-n}$. In diesem Fall ist $s_n = s_{n-1}$ und somit $b > s_n - 2^{-n}$, wie benötigt. Dies beendet den induktiven Beweis der Hilfsbehauptung 1.

Hilfsbehauptung 2. *Wir beobachten nun noch, dass*

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] \leq s_m, \tag{4}$$

da $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Andernfalls wäre nämlich $[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] > s_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Somit gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad s_n - s_m \geq \varepsilon.$$

Für $n := \max\{n_0, m+1\} > m$ wäre dann $s_n - s_m \geq \varepsilon > 0$, im Widerspruch dazu, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Also gilt die Hilfsbehauptung.

Um die noch verbleibende Bedingung aus Lemma II.2.14 nachzuprüfen, sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $2^{-n_0} \leq \varepsilon$. Nach Hilfsbehauptung 1 existiert ein $a \in A$ derart, dass $a > s_{n_0} - 2^{-n_0}$. Da $s_{n_0} \geq [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ nach Hilfsbehauptung 2, erhalten wir $a > [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] - 2^{-n_0} \geq [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] - \varepsilon$, wie benötigt.