Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006
Tutorium 8, Lösungsskizze

Äquivalenzrelationen

Wir nennen eine Relation $\sim$ auf einer Menge X eine *Äquivalenzrelation*, wenn für alle $a, b, c \in X$ gilt:

(i) $a \sim a$ (Reflexivität);

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (Symmetrie);

(iii) $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$ (Transitivität).

Für ein $a \in X$ nennt man $[a] := \{x \in X : x \sim a\}$ die *Äquivalenzklasse* von a. Ein Element b einer Äquivalenzklasse $[a]$ nennt man einen *Repräsentanten* von $[a]$.

Überlegen Sie sich, dass für alle $b \in [a]$ gilt $[a] = [b]$.

Aufgaben

T 27 (Äquivalenzrelationen und Partitionen).

Es sei X eine Menge. Eine *Partition von X* ist eine Menge $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ nichtleerer Teilmengen von X, die paarweise disjunkt sind (d.h. für alle $A_1, A_2 \in P$ mit $A_1 \neq A_2$ ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$) und deren Vereinigung ganz X ist, $X = \bigcup_{A \in P} A$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so ist die Menge $X/\!\sim \; := \{[x] : x \in X\}$ der Äquivalenzklassen eine Partition von X.

(b) Zeigen Sie, dass umgekehrt jede Partition P von X zu einer Äquivalenzrelation $\sim_P$ führt: Man schreibt $x \sim_P y$ für $x, y \in X$ genau dann, wenn ein $A \in P$ existiert mit $x, y \in A$.

Man kann leicht zeigen, dass die zur Partition $X/\!\sim$ gehörende Äquivalenzrelation wieder $\sim$ ist. Umgekehrt ist die zu $\sim_P$ gehörige Partition wieder P. Somit gilt:

Die Partitionen von X entsprechen genau den Äquivalenzrelationen auf X.

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \sim y$, wenn ein $r > 0$ existiert mit $y = rx$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist und finden Sie die Äquivalenzklassen.

(a) Für jedes $x \in X$ gilt $x \in [x]$, somit $[x] \neq \emptyset$. Weiter $x \in [x] \subseteq \bigcup_{A \in X/\sim} A$, also $X = \bigcup_{A \in X/\sim} A$.

Verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt: Gilt nämlich $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ für gewisse $x, y \in X$, so existiert ein $z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $[x] = [z] = [y]$, denn: Ist $u \in [x]$, so ist $u \sim x$. Da $z \in [x]$, gilt auch $z \sim x$. Es ist also $u \sim x$ und $x \sim z$ (wegen der Symmetrie), somit $u \sim z$ (wegen der Transitivität), also $u \in [z]$. Wir haben gezeigt, dass $[x] \subseteq [z]$, und analog ist $[z] \subseteq [x]$, also $[x] = [z]$. Das gleiche Argument zeigt $[y] = [z]$.

(b) Reflexivität: *Sei $x \in X$. Da P eine Partition von X ist, existiert ein $A \in P$ mit $x \in A$. Also $x \sim_P x$.*

Transitivität: *Sind $x, y, z \in X$ mit $x \sim_P y$ und $y \sim_P z$, so existieren $A, B \in P$ mit $x, y \in A$ und $y, z \in B$. Dann gilt $y \in A \cap B$, somit $A \cap B \neq \emptyset$, somit $A = B$ (da P Partition). Daher $x, z \in A$ und somit $x \sim_P z$.*

Symmetrie: *Sind $x, y \in X$ mit $x \sim_P y$, so existiert $A \in P$ mit $x, y \in A$. Also $y \sim_P x$.*

(c) Reflexivität: *Sei $x \in \mathbb{R}$. Da $x = 1x$ mit $1 > 0$, gilt $x \sim x$.*

Transitivität: *Sind $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \sim x_2$ und $x_2 \sim x_3$, so existieren $r > 0$ und $s > 0$ derart, dass*

$$x_2 = rx_1 \qquad \text{und} \qquad x_3 = sx_2\,.$$

Dann ist also $x_3 = sx_2 = s(rx_1) = (sr)x_1 = tx_1$, wobei $t := sr > 0$. Somit $x_1 \sim x_3$.

Symmetrie: *Ist $x_1 \sim x_2$, so existiert ein $r > 0$ mit $x_2 = rx_1$. Dann ist $r^{-1} > 0$ und $x_1 = r^{-1}x_2$, somit $x_2 \sim x_1$.*

Gestalt der Äquivalenzklassen: *Die Äquivalenzklasse $[x]$ von $x \in \mathbb{R}$ besteht aus allen Vielfachen rx von x mit $r > 0$. Es ist daher*

$$[x] \;=\; \begin{cases}]0, \infty[& \text{wenn } x > 0; \\ \{0\} & \text{wenn } x = 0; \\ ]{-\infty}, 0[& \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Insbesondere gibt es genau drei verschiedene Äquivalenzklassen.

T 28 ("Wohldefiniertheit" und Faktorisieren von Abbildungen).

Es sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $q\colon X \to X/\!\sim$, $q(x) := [x]$ die sogenannte "kanonische Quotientenabbildung."

Gegeben eine Abbildung $f\colon X \to Y$ möchte man häufig durch Anwenden auf Repräsentanten daraus eine Abbildung $\tilde{f}\colon X/\!\sim \to Y$ gewinnen:

$$\tilde{f}\colon X/\!\sim \to Y\,, \qquad [x] \mapsto f(x)\,. \tag{1}$$

Nun könnte die rechte Seite aber noch vom gewählten Repräsentanten x der Äquivalenzklasse $[x]$ abhängen. Ist dies nicht der Fall, so ist die Abbildung $\tilde{f}$ sinnvoll definiert. Man sagt, $\tilde{f}$ sei "wohldefiniert."

Wir wollen nun präzisieren, wann $\tilde{f}$ wohldefiniert ist.

(a) Zeigen Sie, dass es genau dann eine Abbildung $\tilde{f}\colon X/\!\sim \to Y$ mit $\tilde{f} \circ q = f$ gibt, wenn aus $q(x_1) = q(x_2)$ stets $f(x_1) = f(x_2)$ folgt.

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$, falls es existiert, durch die Bedingung $\tilde{f} \circ q = f$ eindeutig festgelegt ist.

Sprechweise: Man sagt in voriger Situation auch, dass f "über die Abbildung q faktorisiert" und nennt $\tilde{f}$ die "induzierte" Abbildung.

(a) Falls $\tilde{f}\colon Y \to Z$ existiert mit $\tilde{f} \circ q = f$, so gilt $\tilde{f}(q(x)) = f(x)$ für alle $x \in X$. Sind also $x_1, x_2 \in X$ mit $q(x_1) = q(x_2)$, so gilt

$$f(x_1) = \tilde{f}(q(x_1)) = \tilde{f}(q(x_2)) = f(x_2)\,.$$

Die angegebene Bedingung ist somit notwendig *für die Existenz von $\tilde{f}$.*

Sie ist auch hinreichend, denn folgt aus $q(x_1) = q(x_2)$ stets $f(x_1) = f(x_2)$, so ist

$$\Gamma \;:=\; \{(z, y) \in (X/\!\sim) \times Y \colon (\exists x \in X)\;\, z = q(x) \;\wedge\; y = f(x)\}$$

der Graph einer Funktion $\tilde{f}\colon X/\!\sim\, \to Y$ mit $\tilde{f} \circ q = f$.

(b) Falls $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} \circ q = f$ existiert, so ist $\tilde{f}$ eindeutig festgelegt. Gegeben $z \in X/\!\sim$ existiert wegen der Surjektivität von q nämlich ein $x \in X$ mit $q(x) = z$. Dann ist

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(q(x)) = f(x) \tag{2}$$

durch f festgelegt.

T 29 (Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen).
Auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definieren wir die Relation $\sim$ durch $(z, n) \sim (z', n') \Leftrightarrow zn' = z'n$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Wir definieren $\mathbb{Q} := \mathbb{Z}/\!\sim$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \quad [(z_1, n_1)] \cdot [(z_2, n_2)] := [(z_1 z_2, n_1 n_2)] \tag{3}$$

und

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \quad [(z_1, n_1)] + [(z_2, n_2)] := [(z_1 n_2 + n_1 z_2, n_1 n_2)] \tag{4}$$

wohldefiniert sind.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, +)$ eine abelsche Gruppe ist, mit Neutralelement $[(0, 1)]$.

(d) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, \cdot)$ eine kommutatives Monoid ist mit Neutralelement $[(1, 1)]$. Zeigen Sie, dass jedes von $[(0, 1)]$ verschiedene Element aus $\mathbb{Q}$ invertierbar ist.

Man kann noch das Distributivgesetz nachprüfen; somit ist $\mathbb{Q}$ ein Körper.

Man nennt $\frac{z}{n} := [(z, n)]$ einen Bruch; die obigen Formeln (3) und (4) sind die üblichen Rechenregeln für Addition und Multiplikation von Brüchen.

(a) Reflexivität: Für alle $(z, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gilt $zn = zn$, somit $(z, n) \sim (z, n)$.

Symmetrie: Gilt $(z, n) \sim (z', n')$, so ist $zn' = z'n$ und somit $z'n = zn'$, folglich $(z', n') \sim (z, n)$.

Transitivität: Es gelte $(z, n) \sim (z', n')$ und $(z', n') \sim (z'', n'')$. Dann ist also $zn' = z'n$ und $z'n'' = z''n'$. Folglich gilt $zn'n'' = z'nn'' = z''nn'$, also $n'(zn'' - z''n) = 0$ und folglich $zn'' - z''n = 0$, weswegen $zn'' = z''n$ und somit $(z, n) \sim (z'', n'')$.

(b) Ist $(z_1, n_1) \sim (z_1', n_1')$ *und* $(z_2, n_2) \sim (z_2', n_2')$, *so gilt* $z_1 n_1' = z_1' n_1$ *und* $z_2 n_2' = z_2' n_2$, *folglich*

$$z_1 z_2 n_1' n_2' = z_1 n_1' z_2 n_2' = z_1' n_1 z_2' n_2 = z_1' z_2' n_1 n_2$$

und somit $(z_1 z_2, n_1 n_2) \sim (z_1' z_2', n_1' n_2')$, *wie für die Wohldefiniertheit des Produkts benötigt. Weiter gilt*

$$(z_1 n_2 + n_1 z_2) n_1' n_2' = z_1 n_2 n_1' n_2' + n_1 z_2 n_1' n_2' = z_1' n_2 n_1 n_2' + n_1 z_2' n_1' n_2 = (z_1' n_2' + z_2' n_1') n_1 n_2$$

und somit $(z_1 n_2 + n_1 z_2, n_1 n_2) \sim (z_1' n_2' + z_2' n_1', n_1' n_2')$, *wie für die Wohldefiniertheit der Addition benötigt.*

(c) Assoziativgesetz: Es gilt

$$\begin{aligned} ([(z_1, n_1)] + [(z_2, n_2)]) + [(z_3, n_3)] &= [(z_1 n_2 + n_1 z_2, n_1 n_2)] + [(z_3, n_3)] \\ &= [(z_1 n_2 n_3 + n_1 z_2 n_3 + n_1 n_2 z_3, n_1 n_2 n_3)]\,; \end{aligned}$$

dies stimmt mit

$$\begin{aligned} [(z_1, n_1)] + ([(z_2, n_2)] + [(z_3, n_3)]) &= [(z_1, n_1)] + [(z_2 n_3 + n_2 z_3, n_2 n_3)] \\ &= [(z_1 n_2 n_3 + n_1 z_2 n_3 + n_1 n_2 z_3, n_1 n_2 n_3)] \end{aligned}$$

überein.

$[(0, 1)]$ *ist Neutralelement, da* $[(z, n)] + [(0, 1)] = [(0, 1)] + [(z, n)] = [(z, n)]$.

Die Addition ist kommutativ: Es ist $[(z_1, n_1)] + [(z_2, n_2)] = [(z_1 n_2 + n_1 z_2, n_1 n_2)] = [(z_2 n_1 + n_2 z_1, n_2 n_1)] = [(z_2, n_2)] + [(z_1, n_1)]$.

Es ist $[(-z, n)]$ *das additive Inverse zu* $[(z, n)]$, *denn*

$$[(-z, n)] + [(z, n)] = [(-zn + nz, n \cdot n)] = [(0, n^2)] = [(0, 1)]$$

unter Benutzung von $(0, n^2) \sim (0, 1)$.

(d) Assoziativgesetz: Es gilt

$$\begin{aligned} ([(z_1, n_1)] \cdot [(z_2, n_2)]) \cdot [(z_3, n_3)] &= [(z_1 z_2, n_1 n_2)] \cdot [(z_3, n_3)] \\ &= [(z_1 z_2 z_3, n_1 n_2 n_3)] \;=\; [(z_1, n_1)] \cdot [(z_2 z_3, n_2 n_3)] \\ &= [(z_1, n_1)] \cdot ([(z_2, n_2)] \cdot [(z_3, n_3)])\,. \end{aligned}$$

Kommutativgesetz: Es ist $[(z_1, n_1)] \cdot [(z_2, n_2)] = [(z_1 z_2, n_1 n_2)] = [(z_2 z_1, n_2 n_1)] = [(z_2, n_2)] \cdot [(z_1, n_1)]$.

$[(1, 1)]$ *ist Neutralelement für die Multiplikation: Es ist*

$$[(1, 1)] \cdot [(z, n)] = [(1 \cdot z, 1 \cdot n)] = [(z, n)]\,.$$

Jedes Element $[(z, n)] \neq [(0, 1)]$ *ist invertierbar: Es ist nämlich* $z \cdot 1 \neq 0 \cdot n$, *also* $z \neq 0$ *und somit* $[(n, z)]$ *ein Element von* $\mathbb{Q}$ *derart, dass* $[(n, z)] \cdot [(z, n)] = [(nz, zn)] = [(1, 1)]$, *wobei* $(nz, zn) \sim (1, 1)$ *benutzt wurde.*