Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006
Tutorium 7, Lösungsskizze

Lösungen quadratischer Gleichungen im Reellen und Komplexen

Aufgaben

T 24 (Komplexe Quadratwurzeln und die *p*-*q*-Formel)

(a) Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl, mit $x, y \in \mathbb{R}$. Finden Sie alle komplexen Zahlen $w = a + ib$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) derart, dass $w^2 = z$.

Hinweis: Vergleichen Sie Real- und Imaginärteil von w^2 und z.

(b) Wieviele Quadratwurzeln hat $z \in \mathbb{C}$, falls $z \neq 0$?

(c) Finden Sie explizite Formeln für die komplexen Quadratwurzeln aus $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}_+$.

(d) Zeigen Sie, dass für $p, q \in \mathbb{C}$ die Lösungen der Gleichung

$$z^2 + p\,z + q \;=\; 0$$

gegeben sind durch die Formel

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\,,$$

wobei $\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ eine komplexe Quadratwurzel aus $(\frac{p}{2})^2 - q$ ist.

(a) Ist $z = 0$, so ist $w = 0$ die einzige komplexe Zahl mit $w^2 = z$. Sei nun $z \neq 0$. Da $w^2 = a^2 - b^2 + i(2ab)$, ist $w^2 = z$ äquivalent zu

$$x \;=\; a^2 - b^2 \quad \text{und} \tag{1}$$
$$y \;=\; 2ab\,. \tag{2}$$

1. Fall: $y = 0$. Dann muss $a = 0$ oder $b = 0$ sein.

Fall 1a: Ist $a = 0$, so wird aus (1) die Gleichung $x = -b^2$. Da x und b reell sind, kann eine Lösung b für diese Gleichung nur existieren, wenn $x \leq 0$ ist (und somit $x < 0$, da $z \neq 0$ angenommen wurde). In diesem Falle ist $-x = b^2$ äquivalent zu $b \in \{\sqrt{-x}, -\sqrt{-x}\}$. Also: Ist $z \in -\mathbb{R}_+$, so sind $w_{1/2} = \pm\sqrt{-x}$ die Lösungen zu $w^2 = z$.

Fall 1b: Ist $b = 0$, so wird aus (1) die Gleichung $x = a^2$. Da x und a reell sind, kann eine Lösung a für diese Gleichung nur existieren, wenn $x \geq 0$ ist (und somit $x > 0$, da $z \neq 0$ angenommen wurde). In diesem Falle ist $x = a^2$ äquivalent zu $a \in \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$, wobei $\sqrt{x}$ die positive Quadratwurzel aus x ist. Also: Ist $z \in \mathbb{R}_+$, so sind $w_{1/2} = \pm\sqrt{x}$ die Lösungen zu $w^2 = z$.

Fall 2: Ist $y \neq 0$, so müssen $a, b \neq 0$ sein und (2) ist genau dann erfüllt, wenn $b = \frac{y}{2a}$. Einsetzen dieser Formel zeigt, dass (1) mit $b = \frac{y}{2a}$ genau dann erfüllt ist, wenn $x = a^2 - \frac{y^2}{4a^2}$, also

$$a^4 - xa^2 - \frac{y^2}{4} \;=\; 0\,. \tag{3}$$

Mit $c = a^2$ wird aus (3)

$$c^2 - xc - \frac{y^2}{4} = 0\,.$$

Wegen der p-q-Formel hat diese Gleichung die Lösungen

$$c_\pm = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{x^2 + y^2})\,. \tag{4}$$

Da $y \neq 0$, ist $\sqrt{x^2+y^2} > |x|$. Somit ist $c_- < 0$, es gibt also kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a^2 = c_-$. Jedoch sind

$$a_{1/2} := \pm\sqrt{c_+} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})} \tag{5}$$

zwei Lösungen für (3). Dies kann man in

$$b_{1/2} = \frac{y}{2a_{1/2}} \tag{6}$$

einsetzen, um eine explizite Formel für das passende b_1 bzw. b_2 zu bekommen.

(b) Nach Teil (a) hat eine komplexe Zahl $z \neq 0$ genau zwei komplexe Quadratwurzeln. Ist w die eine, so ist $-w$ die andere.

(c) Mit $x = 0$ und $y \in \mathbb{R}_+$ liefert (5)

$$a_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{y^2}} = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}\,.$$

Einsetzen in (6) liefert $b_{1/2} = \pm\frac{y}{2\sqrt{\frac{y}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$. Die zwei Quadratwurzeln von iy sind also

$$a_1 + ib_1 = (1+i)\sqrt{\frac{y}{2}} \quad \text{und} \quad a_2 + ib_2 = -(1+i)\sqrt{\frac{y}{2}}\,.$$

(d) Da $z^2 + pz + q = (z + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$, ist

$$z^2 + pz + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q\,.$$

Letztere Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $z + \frac{p}{2}$ eine Quadratwurzel aus $\frac{p^2}{4} - q$ ist, wenn also $z + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ oder $z + \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ für eine fest gewählte Wurzel. Auflösen nach z liefert die p-q-Formel.

T 25 (Explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen) Zur Erinnerung: Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert via $s_1 := s_2 := 1$, $s_{n+1} := s_n + s_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Finden Sie alle $q \in \mathbb{R}$ derart, dass $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Es sollten sich für q zwei Lösungen ergeben, ein $\varphi > 0$ und ein $\psi < 0$).

(b) Finden Sie eine geschlossene Formel für die Fibonacci-Zahlen.

Hinweis: Versuchen Sie, $a, b \in \mathbb{R}$ zu finden derart, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad s_n \;=\; a\,\varphi^n \;+\; b\,\psi^n\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} \;=\; \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right);$$

diese Zahl (= φ von oben) ist als "goldener Schnitt" bekannt.

Hinweis: Rechnen Sie zunächst nach, dass $|\psi| < \varphi$.

(a) Multiplikation mit $\frac{1}{q^{n-1}}$ zeigt, dass $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$ äquivalent ist zu

$$q^2 \;=\; q+1\,, \tag{7}$$

also $q^2-q-1=0$. Mit der p-q-Formel berechnen wir die Nullstellen dieser Gleichung zu

$$\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\,, \qquad \psi = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\,.$$

(b) Wir machen den Ansatz $s_n = a\varphi^n + b\psi^n$. Für $n=1$ und $n=2$ führt dies auf das Gleichungssystem

$$1 \;=\; a\varphi + b\psi\,; \tag{8}$$

$$1 \;=\; a\varphi^2 + b\psi^2\,. \tag{9}$$

Die erste Gleichung erfordert $b = \frac{1-a\varphi}{\psi}$. Damit wird (9) zur Bedingung

$$1 = a\varphi^2 + (1-a\varphi)\psi\,,$$

also $1-\psi = a(\varphi^2-\varphi\psi) = a\varphi(\varphi-\psi) = a\varphi\sqrt{5}$, somit $a = \frac{1-\psi}{\varphi\sqrt{5}} = \frac{\varphi}{\varphi\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, wobei wir benutzt haben, dass $1-\psi=\varphi$. Also ist $b = \frac{1-a\varphi}{\psi} = \frac{1-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})}{\psi} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}}{\psi} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}\psi}{\psi} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Wir zeigen nun per Induktion, dass

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \qquad s_n = a\varphi^n + b\psi^n \tag{10}$$

mit a und b wie gerade berechnet. Für $n=1$ und für $n=2$ ist dies laut voriger Rechnung korrekt. Gelte nun (10) für ein $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + s_{n-1} \;=\; a\varphi^n + b\psi^n + a\varphi^{n-1} + b\psi^{n-1} \\ &= a\varphi^{n-1}(\varphi+1) + b\psi^{n-1}(\psi+1) \;=\; a\varphi^{n+1} + b\psi^{n+1}\,, \end{aligned}$$

da ja $\varphi+1=\varphi^2$ und $\psi+1=\psi^2$, nach (7).

(c) Es ist $|\psi| = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) < \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = \varphi$, und somit $\left|\frac{\psi}{\varphi}\right| < 1$. Nach (b) ist

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \qquad s_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)\,.$$

Somit folgt

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}}{\varphi^n-\psi^n} = \frac{\varphi - \psi(\frac{\psi}{\varphi})^n}{1-(\frac{\psi}{\varphi})^n} \to \varphi$$

für $n\to\infty$.

T 26 (Pentagramm und goldener Schnitt)

Der goldene Schnitt φ tritt auch als Längenverhältnis in Pentagrammen auf. Zeigen Sie, dass $\frac{AB}{BC} = \varphi$ im folgenden Pentagramm:

SKIZZE auf gedrucktem Blatt!

Hinweis: Es ist $AB = BD = CF$ (wobei man letztere Gleichheit durch Parallelverschiebung einsieht).

Wenden Sie einen der Strahlensätze an und schließen Sie, dass $\frac{AB}{BC}$ die Gleichung $x^2 = x + 1$ erfüllt.

Nach dem Strahlensatz ist

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}\,. \tag{11}$$

Hierbei ist $AC = AB + BC$, weiter $BE = BC$ aus Symmetriegründen und $CF = BD = AB$ (siehe Hinweis). Einsetzen in (11) liefert

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB + BC}{AB} = 1 + \frac{BC}{AB}\,.$$

Multiplizieren mit $\frac{AB}{BC}$ fÜhrt auf

$$\Big(\frac{AB}{BC}\Big)^2 = \frac{AB}{BC} + 1\,.$$

Also erfüllt das Verhältnis $\frac{AB}{BC}$ die obige Gleichung (7). Da deren einzige positive Lösung der goldene Schnitt φ ist, folgt $\frac{AB}{BC} = \varphi$.